maxi. maths

Exercices résolus

Mathématiques

Sc Math

1ère Année Baccalauréat

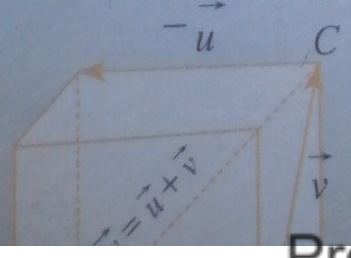
Option sciences mathématiques

Section internationale

Tome 2

1ère Bac S-Math

- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse



$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

ProfSalmi.blogspot.com

1 Leçon Limite d'une fonction numérique

Cours

1 Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$:

a) Limites infinie en $+\infty$

Limites usuelles: (On admet les limites suivantes)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \ (n \in \mathbb{N}^*)$
- Si n est pair et $n \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
- Si n est impair, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

2 Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; $(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$;

ℓ et ℓ' sont des nombres réels. Ces opérations restent valables pour les limites à droite et à gauche en a.

On admet toutes les opérations suivantes:

1. Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée	

ProfSalmi.blogspot.com

2- Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	

3- Limite de l'inverse

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g}(x)$	$\frac{1}{\ell'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

4- Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $\ell<0$	$+\infty$ ou $\ell>0$	$+\infty$ ou $\ell>0$	$-\infty$ ou $\ell<0$	0	$\mp\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	$\mp\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	

3 Limites de fonctions irrationnelles

Propriété:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ (où a est un réel) tel que : $(\forall x\in[a;+\infty[); f(x)\geqslant 0$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ et $\ell\geqslant 0$, alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

Remarque:

Cette propriété reste valable quand x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a, ou à droite en a ou à gauche en a.

ProfSalmi.blogspot.com

4 Limites de fonctions trigonométriques

Propriétés:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$
- Pour tout réel non nul a, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}=a$.
- Pour tout réel a, $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$
- Pour tout réel a, $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\tan x=0$
- Pour tout réel $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

Exemples:

1- Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{3x}$

on a : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\dfrac{\sin(2x)}{3x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin(2x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x}=2$

donc: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin(2x)}{x}=\dfrac{2}{3}$, d'où: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{3x}=\dfrac{2}{3}$

2- Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}}\dfrac{\sin(x)}{x+\frac{\pi}{6}}$:

On a: $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$

et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}}x+\dfrac{\pi}{6}=0^+\ \left(x>-\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{6}>0\right)$

Donc, par quotient: $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}}\dfrac{\sin(x)}{x+\frac{\pi}{6}}=-\infty$

5 Limites et ordre

Propriété:

Soit a et ℓ deux réels et $I=[a;+\infty[$

Soit f, u et v des fonctions numériques définies sur I

1) Si $\begin{cases}*\ (\forall x\in I);u(x)\leqslant f(x)\\ *\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty\end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Si $\begin{cases}*\ (\forall x\in I);u(x)\geqslant f(x)\\ *\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=-\infty\end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

③ Si $\begin{cases} * (\forall x \in I); \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant u(x) \\ * \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

④ Si $\begin{cases} * (\forall x \in I); u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \\ * \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \ell \end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Remarque:

Ces propriétés restent valables en $-\infty$ ou en a ou à droite en a ou à gauche en a.

Exercices

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2 + 3x - 5)$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - 7x)$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3)(1 - x)^3$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 2x^2)(1 + 3x)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 - (x - 1)^2 (x + 2))$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2 - (2x - 1)(2x + 1))$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 3 + 7x)$

2) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (1 - 2x)^{2019} (x - 3)$

3) $\lim\limits_{x \to -2} (4x^3 + 7 - 8x)$

4) $\lim\limits_{x \to -3} (2x^2 - (x^2 - 9)(x + 7))$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\lvert 2x - 1 \rvert - 3x)$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \lvert 2 + x \rvert)$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \lvert 3x^2 - 4x + 1 \rvert$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \lvert x^3 - 3x \rvert$

Exercice 4

1) Calculer les limites suivantes, discuter suivant les valeurs du paramètre réel m:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(m + 1)x^3 + 2mx^2 - x + 7]$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} [(m^2 - m)x^3 + mx^2 - (m - 1)x + 11]$

2) Calculer la limite suivante, discuter suivant les valeurs de l'entier naturel n non nul: $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^n - x^3 + (n - 1)x^2 + 7)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-3x}{2x+1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2+x+3}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-x+5}{x^2-1}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x^3+5x+7}{3x^3-1}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}x^3-5x^2+x+2}{(x-1)^2(2x+3)^2}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(x-1)^2(2x+3)^2}{4x^3+x+7}\right)$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-3x\right)$

3) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)\left(\dfrac{2x}{x-1}-2\right)\right)$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(x-1)^2-x^2}{|2x-1|}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n-3x}{x^2+1}\right)$; (Discuter suivant les valeurs de $n\in\mathbb{N}^*$)

Exercice 7

Calculer les limites suivantes, discuter suivant les valeurs du paramètre réel m:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}\right)$

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{x^2-4x}{|x-2|-2}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{4x}{|x+1|-|x-1|}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}\right)$

Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{1-x}\right)$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

3) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\left(\dfrac{x^2+3x-7}{x^2+2x}\right)$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}\right)$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8}\right)$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(\dfrac{3x-2x^2}{x-x^3}\right)$

Exercice 10

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-x+2}{(x-1)^2(x+2)}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+7}{|x^2+2x|}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}\left(1-\dfrac{3x}{12-x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)$

Exercice 11

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-3}\ ; x<3 \\ f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x}\ ; x>3 \end{cases}$

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Exercice 12

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x-1+\dfrac{2}{x}\ ; x>0 \\ f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}\ ; x\le 0 \end{cases}$

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-(x-1))$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f puis calculer les limites de f aux bornes de D.

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $(\forall x\in D)\ ; f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

b) Calculer : $\lim\limits_{|x|\to +\infty} f(x)-(ax+b)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $D =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} ; x \in]-\infty;0[\\ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1} ; x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

1) Calculer les limites de f aux bornes de D.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

Exercice 15

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5x)}{2x}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(3x)}{\sin x}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\sin(2x)}{x^3}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)-\sin x}{\sin(2x)+\sin x}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(3x)}{\sin^2 x}$

Exercice 16

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3.\cos x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}$

Exercice 17

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}$

2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1-\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x(1-x)}{\sin(\pi x)}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-2)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 18

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x\sqrt{x}-5x^2)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1-3x}{x-\sqrt{x}}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x}-x+1}{x^2+x\sqrt{x}}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1-x\sqrt{x}+x}{x-\sqrt{x}}\right)$

Exercice 19

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-\sqrt{1+x})$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{2-x}+3x)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{2-\sqrt{x+2}}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x^2-x+1-\sqrt{2x+1})$

Exercice 20

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1})$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1})$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x})$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{1-2x}-\sqrt{2}\sqrt{-x})$

Exercice 21

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-\sqrt{1+x^2})$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\sqrt{3x^2+1})$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x-1)$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})$

Exercice 22

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^3+x+1}-3x)$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1}-x^3)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1})$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-3x}{x+1}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+x}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 23

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+\sqrt{x}}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x\sqrt{x}}{x^2-1}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\sqrt{x}\right)$

Exercice 24

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}\cdot\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to4^-}\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4}\right)$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}\right)$

Exercice 25

Lecture graphique de limites

La figure suivante représente la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$.
Déterminer, par lecture graphique, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

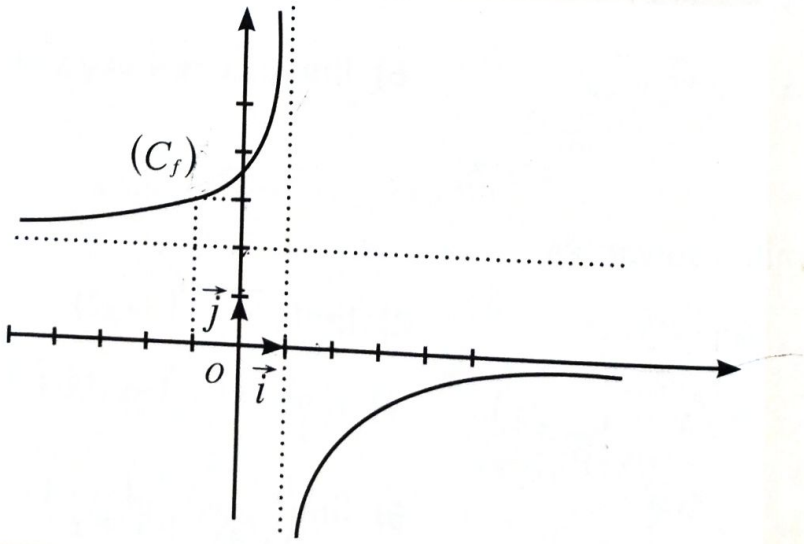
3) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

4) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$

5) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)-2}\right)$



ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 26

Lecture graphique de limites

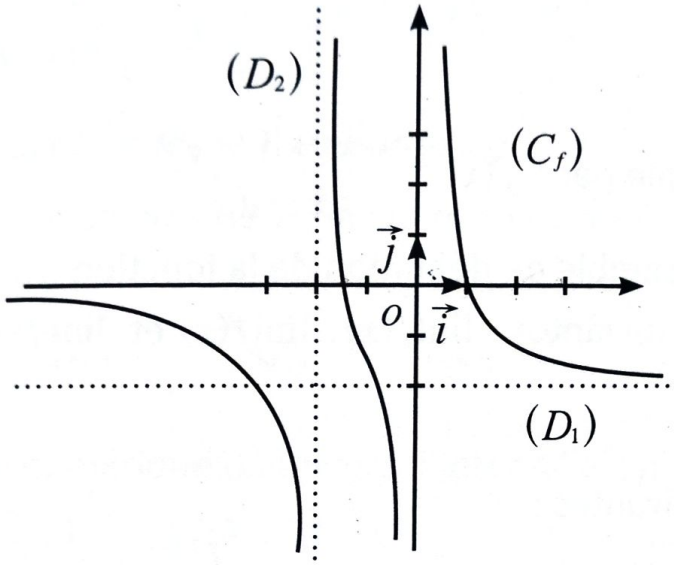
La figure suivante représente la courbe d'une fonction f.
Par lecture graphique, déterminer :

1) D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **4)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **5)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)$ **7)** $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)$ **8)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f(x)+1}\right)$ **9)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **11)** $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$



Exercice 27

Limites et ordre

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,2x-4\le 2x-1+3\cos x$

En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1+3\cos x)$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^2-4x\sin(x)+1$

a) Montrer que f est une fonction paire.

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,;\,f(x)\ge(2x-1)^2$

c) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice 28

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}$

1) Montrer que : $(\forall x>0)\,;\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{x^2}$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 29

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+2}\right)$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-5}{x\sqrt{x}}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+100}}{x+1}\right)$ **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}$ où $a>0$ et $b>0$

Exercice 30

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}$ **2)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ **3)** $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}$

Exercice 31

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x}}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Exercice 32

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}\right)$

Exercice 33

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2-|x^2-4x|+3}{x^2+x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Ecrire l'expression de $f(x)$ sans symbole de valeur absolue.

3) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

Exercice 34

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

3) Montrer que la fonction f admet une limite finie en $x_0=1$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 35

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+2x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+7}+2x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+b}+cx)$

(où a, b et c sont des nombres réels strictement positifs).

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{4x}$.

Exercice 36

1) Soit n un entier naturel non nul.

Déterminer, suivant les valeurs de n, les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n}{x^2+x+1}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^n}{x^2+x+1}\right)$

2) Soit a, b et c des nombres réels tels que : $a>0$.

Déterminer, suivant les valeurs de a, la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{ax^2+bx+c})$

Exercice 37

Soit h une fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que :

$(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\,x^3-3x^2<h(x)<x^3+x^2$

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x^3}$.

Exercice 38

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x+\cos x}{x+1}$

1) Montrer que : $(\forall x>0)\,;|f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Exercice 39

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) a) Montrer que : $(\forall x\in[-1;1]-\{0\})\,;|f(x)|\le|x|$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 40

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3x}{\sin(3x)}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(\cos x-1)\sin x}{x^3.\cos x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}\right)$

Exercice 41

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x} & ; x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x} & ; x<0 \end{cases}$

1) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

3) a) Montrer que : $(\forall x<0)\,;|f(x)|\leq\dfrac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Exercice 42

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{9x^2+\cos x-x\sin x}{3x^2+1}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$

Exercice 43

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\tan(\pi x)}{x-2}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)}{x(x+2)}\right)$

Exercice 44

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{\pi}{3}\\ x>-\frac{\pi}{3}}}\left(\dfrac{x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cos^2(x)-4\cos x+2}{x^4\cos x}\right)$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{\pi}{3}\\ x<-\frac{\pi}{3}}}\left(\dfrac{x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 45

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{4x+5\sin x}{x-2}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}([x]-\cos x)$

(où $[x]$ designe la partie entière de x)

Exercice 46

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}}{x^2} ; x\neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{12} \end{cases}$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);|f(x)|\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Exercice 47

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x\sqrt{3-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in[-1;1]-\{0\});|f(x)|\leq 2|x|$

b) En déduire que f admet une limite finie en 0.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Exercice 48

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1})}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{1-x^3}+x-1)$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}\right)$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$

Exercice 49

1) Calculer les limites suivantes : (où $E(x)$ designe la partie entiére de x)

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x-E(x))$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}(x-E(x))$

2) Soit a un entier relatif.

ProfSalmi.blogspot.com

Calculer les limites suivantes :

I) $\lim\limits_{x\to a^+}(E(x+2)+E(2-x))$ **ii)** $\lim\limits_{x\to a^+}E(x)+(x-E(x))^2$

III) $\lim\limits_{x\to a^-}E(x)+(x-E(x))^2$

Exercice 50

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+2x\cos(x)+1}$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\left|\frac{\cos x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);|x-\cos x|\leq f(x)\leq x+1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Exercice 51

Soit f la fonction définie sur $D=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ par :

$$f(x)=4x\tan(2x)-\frac{\pi}{\cos(2x)}$$

1) Montrer que : $(\forall x\in D);f(x)=\dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) a) Soit x un élément de D. On pose : $h=x-\frac{\pi}{4}$.

Montrer que : $\dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}=4\cos(2h)-4\pi h\times\left(\dfrac{1-\cos(2h)}{4h^2}\right)$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$

4) Montrer que la fonction f admet une limite finie en $x_0=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 52

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);|f(x)-x|<x^2$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 53

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x^2\left(E\left(\frac{1}{x}\right)+E\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);-2x^2+x+1<f(x)\leq x+1$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Exercice 54

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{E(x)+\sin x}{x};x\neq 0\\ f(0)=1\end{cases}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, en comparant chaque résultat avec $f(0)$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);|f(x)-1|\leq\frac{2}{|x|}$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Exercice 55

Soit a et b des réels strictement positifs.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)$

1) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[);\frac{b}{a}-\frac{x}{a}<f(x)\leq\frac{b}{a}$

b) Montrer que : $(\forall x\in]-\infty;0[);\frac{b}{a}\leq f(x)<\frac{b}{a}-\frac{x}{a}$

2) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\left|f(x)-\frac{b}{a}\right|<\left|\frac{x}{a}\right|$, puis déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Exercice 56

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\sin(x)E\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\left|f(x)-\frac{\sin x}{x}\right|\leq|\sin x|$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

2) a) Montrer que : $(\forall x>0);|f(x)|\leq\frac{1}{x}$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0}xE\left(\frac{1}{x}\right)=1$

b) Retrouver à nouveau $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Exercice 57

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases}f(x)=x.\sqrt{1+\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2};x\neq 0\\ f(0)=1\end{cases}$$

ProfSalmi.blogspot.com

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que : $(\forall x > 0)\ ; \sqrt{1+x^2} \le f(x) \le \sqrt{2x^2+2x+1}$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

3) Étudier limite de la fonction f en $\frac{1}{k}$ où $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Exercice 58

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x-1}.E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $p \ge 2$.

Déterminer $f(x)$ en fonction de x et p dans chacun des cas suivants :

$x \in \left]\frac{1}{p^2}; \frac{1}{(p-1)^2}\right[$ et $x \in \left]\frac{1}{(p+1)^2}; \frac{1}{p^2}\right[$

puis déduire : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{p^2}\right)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{p^2}\right)^-} f(x)$.

Solution

Exercice 1

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2+3x-5)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2+3x+5) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2) = -\infty$ (car $-2 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$)

2) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-7x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-7x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-7x) = +\infty$ (car $-7 < 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$)

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)(1-x)^3$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)^3 = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$

(car $(1-x)^3 = 1-3x+3x^2-x^3$)

Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)(1-x)^3 = -\infty$.

4) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x^2)(1+3x)$:

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2)=-\infty$ (car $-2<0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$)

et $\lim\limits_{x\to-\infty}1+3x=\lim\limits_{x\to-\infty}3x=-\infty$

Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x^2)(1+3x)=+\infty$.

5) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-(x-1)^2(x+2))$:

On a : $2x^3-(x-1)^2(x+2)=2x^3-(x^2-2x+1)(x+2)=x^3+3x-2$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-(x-1)^2(x+2))=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^2-(2x-1)(2x+1))$:

On a : $4x^2-(2x-1)(2x+1)=4x^2-(4x^2-1)=1$ et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^2-(2x-1)(2x+1))=1$.

Exercice 2

1) Calculons $\lim\limits_{x\to1}(2x^2-3+7x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to1}(2x^2-3+7x)=2\times1^2-3+7\times1=6$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(1-2x)^{2019}(x-3)$:

On remarque que : $1-2x=0\iff x=\frac{1}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(1-2x)^{2019}=0$

et on a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(x-3)=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$,

donc : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(1-2x)^{2019}(x-3)=0\times\left(-\frac{5}{2}\right)=0$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to-2}(4x^3+7-8x)$:

On a : $4\times(-2)^3+7-8\times(-2)=-9$, donc : $\lim\limits_{x\to-2}(4x^3+7-8x)=-9$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to-3}(2x^2-(x^2-9)(x+7))$:

On a : $\lim\limits_{x\to-3}x^2-9=0$ et $\lim\limits_{x\to-3}(x+7)=4$, donc : $\lim\limits_{x\to-3}(x^2-9)(x+7)=0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-3}2x^2=18$

D'où : $\lim\limits_{x\to-3}(2x^2-(x^2-9)(x+7))=18$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 3

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(|2x-1|-3x)$:

Puisqu'on cherche la limite en $+\infty$, on peut supposer que $x>\frac{1}{2}$, alors : $2x-1>0$.

Donc : $|2x-1|-3x=2x-1-3x=-x+1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}|2x-1|-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+|2+x|)$:

Puisqu'on cherche la limite en $-\infty$, on peut supposer que $x<-2$, alors : $x+2<0$.

Donc : $x+|2+x|=x-2-x=-2$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+|2+x|)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2)=-2$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}|3x^2-4x+1|$:

• **Méthode 1 :** Etudions le signe de $3x^2-4x+1$

On a : $\Delta=16-12=4$, alors : $x_1=\frac{4+2}{6}=1$ et $x_2=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}$

Donc le tableau de signes de $3x^2-4x+1$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où pour tout réel $x\geq 1$: $|3x^2-4x+1|=3x^2-4x+1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}|3x^2-4x+1|=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

• **Méthode 2 :** Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ (ou $-\infty$) alors : $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$

[Cette propriété reste valable si on calcule la limite quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$].

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-4x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}|3x^2-4x+1|=+\infty$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}|x^3-3x|$:

• **Méthode 1 :** Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3-3x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}|x^3-3x|=+\infty$

• **Méthode 2 :** On a : $x^3-3x=x(x^2-3)$

et $x^2-3>0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc pour tout réel $x \in]-\infty;-\sqrt{3}[$ on a : $x^3-3x<0$

donc : $|x^3-3x|=-x^3+3x$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}|x^3-3x|=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$.

Exercice 4

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}[(m+1)x^3+2mx^2-x+7]$:

• Si $m+1=0$ c'est-à-dire $m=-1$ alors cette limite devient :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2-x+7)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2)=-\infty$

• Si $m\neq-1$ alors le terme du plus haut degré du polynôme $(m+1)x^3+2mx^2-x+7$ est $(m+1)x^3$.

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, alors :

• Si $m>-1$ alors : $m+1>0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}[(m+1)x^3+2mx^2-x+7]=+\infty$

• Si $m<-1$ alors : $m+1<0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}[(m+1)x^3+2mx^2-x+7]=-\infty$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}[(m^2-m)x^3+mx^2-(m-1)x+11]$:

On a : $m^2-m=0\iff m(m-1)=0$

$\iff m=0$ *ou* $m=1$

Donc il y a trois cas à distinguer : $m=0$, $m=1$ et $m^2-m\neq0$.

• si $m=0$ alors cette limite devient : $\lim\limits_{x\to-\infty}x+11=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

• si $m=1$ alors cette limite devient : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+11=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

• si $m\neq0$ et $m\neq1$ c'est-à-dire : $m^2-m\neq0$, alors :

$\lim\limits_{x\to-\infty}[(m^2-m)x^3+mx^2-(m-1)x+11]=\lim\limits_{x\to-\infty}(m^2-m)x^3$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, $m^2-m>0\iff m\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

et $m^2-m<0\iff m\in]0;1[$,

on a :

• si $m\in]0;1[$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}(m^2-m)x^3=+\infty$

• si $m\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}(m^2-m)x^3=-\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}[(m^2-m)x^3+mx^2-(m-1)x+11]=+\infty$, si $m\in]0;1[$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}[(m^2-m)x^3+mx^2-(m-1)x+11]=-\infty$, si $m\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

ProfSalmi.blogspot.com

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^n - x^3 + (n-1)x^2 + 7)$ où $n \in \mathbb{N}^*$:

- Si $n > 3$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^n - x^3 + (n-1)x^2 + 7) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^n = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$)
- Si $n = 3$ alors cette limite devient : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3 + 2x^2 + 7) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$
- Si $0 < n < 3$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^n - x^3 + (n-1)x^2 + 7) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$.

Exercice 5

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-3x}{2x+1}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-3x}{2x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+x+3}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+x+3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-x+5}{x^2-1}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-x+5}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x^3+5x+7}{3x^3-1}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^3+5x+7}{3x^3-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^3}{3x^3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}x^3-5x^2+x+2}{(x-1)^2(2x+3)^2}\right)$:

Le terme du plus haut degré du polynôme $(x-1)^2(2x+3)^2$ est $x^2 \times 4x^2$ c'est-à-dire : $4x^4$,

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}x^3-5x^2+x+2}{(x-1)^2(2x+3)^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}x^3}{4x^4}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{4x}\right) = 0$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)^2(2x+3)^2}{4x^3+x+7}\right)$:

Le terme du plus haut degré du polynôme $(x-1)^2(2x+3)^2$ est $4x^4$,

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)^2(2x+3)^2}{4x^3+x+7}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^4}{4x^3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 6

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{x^2+1}{x+2}\right)$:

On a : $2x-\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{x^2+4x-1}{x+2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{x^2+1}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x-1}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-3x\right)$:

On a : $\frac{x^2+1}{x+1}-3x=\frac{-2x^2-3x+1}{x+1}$,

Donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^2-3x+1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)$:

On a : $x^2-3x>0\iff x(x-3)>0$

$\iff x\in\,]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$

et $x-1>0\iff x\in\,]1;+\infty[$, $x-1<0\iff x\in\,]-\infty;1[$.

• Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)$:

On a : x tend vers $+\infty$, on peut supposer $x>3$,

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x(x-1)}{x^2-3x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

• Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)$:

On a : x tend vers $-\infty$, on peut supposer $x<0$,

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x(x-1)}{x^2-3x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)=-1$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4}\right)$:

On a le discriminant du trinôme x^2-3x+5 est $\Delta=-11$.

alors : $\Delta<0$ et $a>0$ donc : $x^2-3x+5>0$ pour tout réel x.

ProfSalmi.blogspot.com

Par suite : $|x^2-3x+5|=x^2-3x+5$, et on a : $x\leq 0 \Leftrightarrow |x|=-x$

D'où :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x+5}{-3x+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{3}\right)=+\infty$$

5) Calculons $\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\left(\frac{2x}{x-1}-2\right)\right)$:

On a : $\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\left(\frac{2x}{x-1}-2\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}(2x-2(x-1))=\lim_{x\to+\infty}(2)=2$

6) Calculons $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)^2-x^2}{|2x-1|}\right)$:

On a : x tend vers $-\infty$, on peut supposer $x<\frac{1}{2}$, alors : $2x-1<0$

Donc : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)^2-x^2}{|2x-1|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x+1}{-2x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}(1)=1$

7) Calculons $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n-3x}{x^2+1}\right)$, où $n\in\mathbb{N}^*$:

- si $n=1$ alors cette limite devient :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right)=0$$

- si $n=2$ alors cette limite devient : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(1)=1$

- si $n\geq 3$ alors $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n-3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^{n-2}=+\infty$ (car $n-2\geqslant 1$)

Exercice 7

1) Calculons $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}\right)$:

On pose : $f(x)=\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}$

On a : $m^2-1=0\Leftrightarrow m=1$ *ou* $m=-1$, c'est-à-dire le coefficient de x^3 s'annule pour $m=1$ ou $m=-1$.

Par suite on aura les cas suivants :

- **Cas 1 :** si $m=1$ alors : $f(x)=\frac{-x+5}{3x+1}$

Donc : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$

- **Cas 2 :** si $m=-1$ alors : $f(x)=\frac{-2x^2-x+5}{3x+1}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^2}{3x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{3}x\right) = +\infty$

• **Cas 3 :** si $m \neq 1$ et $m \neq -1$, alors f est une fonction rationnelle, le rapport de ses termes du plus haut degré est : $\left(\frac{m^2-1}{3}\right)x^2$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{m^2-1}{3}\right)x^2$

Tableau de signe de m^2-1 :

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
m^2-1		+	0	-	0	+	

• si $m \in]-1;1[$ alors : $\frac{m^2-1}{3} < 0$, et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{m^2-1}{3}\right)x^2 = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

• si $m \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ alors : $\frac{m^2-1}{3} > 0$, et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{m^2-1}{3}\right)x^2 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

• **Conclusion :**

• si $m = 1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

• si $-1 < m < 1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

• si $m > 1$ ou $m \leq -1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}\right)$:

On pose : $f(x) = \frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}$

- si $m = 1$ alors : $f(x) = \frac{(x-1)^2}{3x^2-5x+7}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

- si $m \neq 1$ alors f est une fonction rationnelle dont le rapport de ses termes du plus haut degré est : $\left(\frac{m-1}{3}\right)x$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^2}{3x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{3}x\right) = +\infty$

• **Cas 3 :** si $m \neq 1$ et $m \neq -1$, alors f est une fonction rationnelle, le rapport de ses termes du plus haut degré est : $\left(\frac{m^2-1}{3}\right)x^2$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{m^2-1}{3}\right)x^2$

Tableau de signe de m^2-1 :

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
m^2-1		+	0	-	0	+	

• si $m \in]-1;1[$ alors : $\frac{m^2-1}{3} < 0$, et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{m^2-1}{3}\right)x^2 = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

• si $m \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ alors : $\frac{m^2-1}{3} > 0$, et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{m^2-1}{3}\right)x^2 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

• **Conclusion :**

• si $m = 1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

• si $-1 < m < 1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

• si $m > 1$ ou $m \leq -1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}\right)$:

On pose : $f(x) = \frac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}$

- si $m = 1$ alors : $f(x) = \frac{(x-1)^2}{3x^2-5x+7}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

- si $m \neq 1$ alors f est une fonction rationnelle dont le rapport de ses termes du plus haut degré est : $\left(\frac{m-1}{3}\right)x$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{m-1}{3}\right)x$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par suite :

- si $m > 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{m-1}{3}\right)x = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- si $m < 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{m-1}{3}\right)x = -\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 8

Méthode : Pour calculer $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ dans le cas où : $P(a) = Q(a) = 0$, $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions polynômes, on applique ce qui suit :
On factorise $P(x)$ et $Q(x)$ par $(x-a)$ en utilisant les divisions euclidienne par $(x-a)$ (ou toute autre méthode suivant les cas) puis on simplifie par $(x-a)$.

1) Calculons $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^3-1}{x^2+x-2}\right)$:

On a : $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

alors : $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^3-1}{x^2+x-2}\right) = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+2} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^3-1}{x^2+x-2}\right) = 1$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{x^2-4x}{|x-2|-2}\right)$:

Puisqu'on cherche la limite lorsque x tend 4, on peut supposer que $x > 2$.

c'est-à-dire : $x-2 > 0$ alors : $|x-2| = x-2$

Donc : $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{x^2-4x}{|x-2|-2}\right) = \lim\limits_{x\to4}\frac{x(x-4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to4} x = 4$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{x^2-4x}{|x-2|-2}\right) = 4$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{4x}{|x+1|-|x-1|}\right)$:

Puisqu'on cherche la limite au voisinage de zéro, on peut supposer que : $-1 < x < 1$

c'est-à-dire : $x+1 > 0$ et $x-1 < 0$

Alors : $|x+1| = x+1$ et $|x-1| = -(x-1)$

Donc : $|x+1|-|x-1| = 2x$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x}{|x+1|-|x-1|}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}2=2$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x}{|x+1|-|x-1|}\right)=2$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+3}{x}=-\dfrac{1}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}\right)=-\dfrac{1}{2}$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x}=2$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}\right)=2$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}\right)$:

On a : $x^2=|x|^2$, alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|-1)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|+1}{|x|-1}=-1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}\right)=-1.$

Exercice 9

1) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{1-x}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x^2-x+3)=4$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)=0^-$ (car $x>1\Rightarrow 1-x<0$)

Donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{1-x}\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{1-x}\right)=-\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$:

On a : $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{x^2-1}{x^3}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x^3=0^+$, alors, par quotient :

ProfSalmi.blogspot.com

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^2-1}{x^3}\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)=-\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\left(\dfrac{x^2+3x-7}{x^2+2x}\right)$:

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(x^2+3x-7)=-9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(x^2+2x)=0$

Tableau de signe de x^2+2x :

On a : $x^2+2x=0 \iff x(x+2)=0$

$\iff x=0$ *ou* $x=-2$

Alors :

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x^2+2x	+	0	-	0	+

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(x^2+2x)=0^-$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\left(\dfrac{x^2+3x-7}{x^2+2x}\right)=+\infty$

4) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 3^-}(2x^2-x+1)=16$ et $\lim\limits_{x\to 3^-}(3-x)(-1-x)=0$

Tableau de signe de $(3-x)(-1-x)$:

On a : $(3-x)(-1-x)=0 \iff x=3$ *ou* $x=-1$

Alors :

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$(3-x)(-1-x)$	+	0	-	0	+

Donc : $\lim\limits_{x\to 3^-}(3-x)(-1-x)=0^-$

D'où, par quotient : $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}\right)=-\infty$

5) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8}\right)$:

On a : $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$,

alors : $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8}=\dfrac{1}{x-2}\left(1-\dfrac{1}{x^2+2x+4}\right)=\dfrac{1}{x-2}\left(\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+4}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque : $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+4}\right)=\frac{11}{12}$

Alors, par quotient : $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+4}\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^3-8}\right)=-\infty$

6) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(\frac{3x-2x^2}{x-x^3}\right)$:

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(3x-2x^2)=-5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x-x^3)=0$

Tableau de signe de $x-x^3$:

On a : $x-x^3=0 \iff x(1-x^2)=0$

$\iff x=0\ ou\ x=1\ ou\ x=-1$

Alors :

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	-		-	0	+		+
$1-x^2$	-	0	+		+	0	-
$x-x^3$	+	0	-	0	+	0	-

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x-x^3)=0^-$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(\frac{3x-2x^2}{x-x^3}\right)=+\infty$

Remarque : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(\frac{3x-2x^2}{x-x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(\frac{3-2x^2}{1-x}\right)=+\infty$

Exercice 10

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x+2}{(x-1)^2(x+2)}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-x+2)=2$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2(x+2)=0^+$

(car $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ et $(x-1)^2\geq 0$)

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x+2}{(x-1)^2(x+2)}\right)=+\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

2) Calculons $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+7}{|x^2+2x|}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to -2}(x+7)=5$ et $\lim\limits_{x\to -2}|x^2+2x|=0^+$

(car $\lim\limits_{x\to -2}|x^2+2x|=0$ et $|x^2+2x|\geq 0$)

Donc : $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+7}{|x^2+2x|}\right)=+\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}\left(1-\dfrac{3x}{12-x}\right)$:

Directement, cette limite est une forme indéterminée du type « $\infty\times 0$ »

(car $\lim\limits_{x\to 3}\left(1-\dfrac{3x}{12-x}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$)

Il suffit de réduire au même dénominateur puis développer et simplifier la fonction rationnelle obtenue :

Soit x de $\mathbb{R}-\{3;12\}$, on a : $\dfrac{1}{x-3}\left(1-\dfrac{3x}{12-x}\right)=\dfrac{1}{x-3}\left(\dfrac{12-x-3x}{12-x}\right)$

$=\dfrac{1}{x-3}\left(\dfrac{12-4x}{12-x}\right)=\dfrac{-4}{12-x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{-4}{12-x}\right)=-\dfrac{4}{9}$ alors : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}\left(1-\dfrac{3x}{12-x}\right)=-\dfrac{4}{9}$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)$:

Directement, cette limite est une forme indéterminée du type « $\infty\times 0$ »

Or : pour x de $\mathbb{R}-\{0;1\}$, on a : $\dfrac{1}{x}\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^2-1+1}{x-1}\right)=\dfrac{x}{x-1}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-1}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)=0$

Exercice 11

a) Calculons $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$:

Puisqu'on cherche la limite lorsque x tend vers $-\infty$, on peut supposer que $x<3$,

alors : $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-3}$

Or : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}2x=-\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a x tend vers $+\infty$, alors on peut supposer que $x > 3$,

c'est-à-dire : $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 3x}$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c) Calculons $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$:

Pour $x < 3$ on a : $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 3}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to3^-}(2x^2 - x + 1) = 16$ et $\lim\limits_{x\to3^-}(x - 3) = 0^-$

(car : $x \to 3^- \Longrightarrow x < 3$)

Alors : $\lim\limits_{x\to3^-}\left(\dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 3}\right) = -\infty$; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$

d) Calculons $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$:

Pour $x > 3$, on a : $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 3x}$

On a : $\lim\limits_{x\to3^+}(x^3 - x^2 + 1) = 19$ et $\lim\limits_{x\to3^+}(x^2 - 3x) = 0$

Tableau de signe de $x^2 - 3x$:

Puisque : $x^2 - 3x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 3$

alors :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2 - 3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to3^+}(x^2 - 3x) = 0^+$

Par suite : $\lim\limits_{x\to3^+}\left(\dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 3}\right) = +\infty$ C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$

e) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x \in]3; +\infty[$, on a : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x(x^2 - 3x)} = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 3x^2}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 3x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1) = 1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

ProfSalmi.blogspot.com

f) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x\in\,]-\infty;3[-\{0\}$, on a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{2x^2-x+1}{x(x-3)}=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-3x}$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-3x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2)=2$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

Exercice 12

f est définie par: $\begin{cases} f(x)=x-1+\dfrac{2}{x}\ ;\ x>0 \\ f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}\ \ ;\ x\leqslant 0 \end{cases}$

a) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$:

On a x tend vers $-\infty$, alors on peut supposer que $x\leq 0$.

Donc : $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

On a x tend vers $+\infty$, alors on peut supposer que $x>0$.

Donc : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

c) Calculons $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$:

Pour $x>0$, on a : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{x}$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{x}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-1+\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

d) Calculons $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$:

Pour $x<0$ et $x\neq-1$ on a : $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+3x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$, alors par quotient :

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{x^2+3x}{x+1}\right)=0$

ProfSalmi.blogspot.com

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

e) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))$:

Pour $x > 0$ on a : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x}$ alors : $f(x)-(x-1) = \frac{2}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1)) = 0$

f) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \in]-\infty;-1[$; on a : $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+1}$ par suite : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+3x}{x^2+x}$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2+x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$.

Exercice 13

1) • Déterminons D l'ensemble de définition de f :

Soit x un réel, on a : $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$ alors :

$$x \in D \iff x+2 \neq 0$$
$$\iff x \neq -2$$
$$\iff x \in]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$$

Donc : $D =]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

• Calculons les limites de f aux bornes de D :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$

et aussi : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x) = -\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Tableau de signe de $x+2$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	-	0	+

Alors : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(x^2+x-1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(x+2) = 0^-$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\frac{x^2+x-1}{x+2}\right) = -\infty$

On a: $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(x^2+x-1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(x+2) = 0^+$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\left(\frac{x^2+x-1}{x+2}\right) = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$(\forall x \in D);\ f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

Soit x un élément de D, on a : $ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$

$$= \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b + c}{x+2}$$

$$= \frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b + c}{x+2}$$

Alors : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} \iff \frac{x^2+x-1}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$

$$\iff x^2 + x - 1 = ax^2 + (2a+b)x + 2b + c$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\iff a = 1 \text{ et } b = -1 \text{ et } c = 1$$

Donc : $(\forall x \in D);\ f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$

b) Calculons $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) - (ax+b)$:

Soit $x \in D$, on a : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$ donc : $f(x) - (x-1) = \frac{1}{x+2}$

Puisque : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right) = 0$ alors : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x) - (x-1)) = 0$

Exercice 14

1) Déterminons les limites de f aux bornes de D :

• Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On a : x tend vers $-\infty$, alors on peut supposer que $x < 0$.

Donc : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

• Calculons $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$:

On a : x tend vers 1, alors l'expression f est : $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

et on a : $\lim\limits_{x\to1} x^3 = 1$ et $\lim\limits_{x\to1}(x^2-1) = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Tableau de signe de x^2-1 :

On a : $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

Alors :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
x^2-1	+	0	-	0	+

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0^-$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

Soit : $x>1$, on a : $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) • Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

Soit $x\in]1;+\infty[$, on a : $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

Donc : $\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3}{x(x^2-1)}=\frac{x^3}{x^3-x}$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^3-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$:

Soit $x\in]1;+\infty[$, on a : $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

Donc : $f(x)-x=\frac{x^3}{x^2-1}-x=\frac{x^3-x(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\frac{x}{x^2-1}$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 15

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{2x}$:

Rappel : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}=a$ où a est un réel non nul.

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(5x)}{x}\right)=\dfrac{1}{2}\times 5=\dfrac{5}{2}$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(3x)}{\sin x}$:

Rappel : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(bx)}{x}=b$ où $b\in\mathbb{R}^*$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(3x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan(3x)}{x}\right)\times\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)=3$

Car : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(3x)}{x}=3$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}\right)$:

On a : $\sin(2x)-2\sin x=2\sin(x)\cos(x)-2\sin x=-2\sin(x)(1-\cos x)$ pour tout réel x.

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}=\frac{-2\sin(x)(1-\cos x)}{x^3}=-2\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$ alors par produit :

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)\right)=-1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}\right)=-1$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1-\cos x)\sin(2x)}{x^3}\right)$:

Soit x un réel non nul, on a : $\dfrac{(1-\cos x)\sin 2x}{x^3}=\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\dfrac{\sin(2x)}{x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$ alors, par produit :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)=1.\ \text{Ainsi : }\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-\cos x)\sin 2x}{x^3}\right)=1$$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(3x)-\sin x}{\sin(2x)+\sin x}\right)$:

Soit x un réel tel que : $\sin(2x)+\sin x\neq 0$ $\left(x\neq\dfrac{2k\pi}{3}\right.$ et $\left.x\neq\pi+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\dfrac{\sin(3x)-\sin x}{\sin(2x)+\sin x}=\dfrac{\dfrac{\sin(3x)-\sin x}{x}}{\dfrac{\sin(2x)+\sin x}{x}}=\dfrac{\dfrac{\sin(3x)}{x}-\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\sin(2x)}{x}+\dfrac{\sin x}{x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}=3$

alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{\sin(3x)}{x}-\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\sin(2x)}{x}+\dfrac{\sin x}{x}}\right)=\dfrac{2}{3}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(3x)-\sin x}{\sin(2x)+\sin x}\right)=\dfrac{2}{3}$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos(3x)}{\sin^2 x}\right)$:

Soit x un réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\frac{1-\cos(3x)}{\sin^2(x)}=\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\times\frac{(3x)^2}{\sin^2(x)}=9\left(\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ donc : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2=1$

D'autre part, on pose : $X=3x$ alors : $x\to 0$ équivaut à $X\to 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{1-\cos X}{X^2}=\dfrac{1}{2}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0}9\left(\dfrac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right)\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2=\dfrac{9}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right)=\dfrac{9}{2}$

Exercice 16

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3.\cos x}\right)$:

Soit x un réel non nul et différent de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, on a :

$\sin x=\tan x.\cos x$

Par suite : $\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3\cos x}=\dfrac{\tan x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=\left(\dfrac{-1}{\cos x}\right)\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1}{\cos x}\right)=-1$

alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1}{\cos x}\right)\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)=-\dfrac{1}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3.\cos x}\right)=-\dfrac{1}{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$:

Soit x un réel strictement positif, on pose : $X=\frac{1}{x}$ alors : $x=\frac{1}{X}$

On a : x tend vers $+\infty$ équivaut à X tend vers 0^+.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{\sin X}{X}=1$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$:

Soit x un réel différent de $\frac{\pi}{2}$, on pose : $X=x-\frac{\pi}{2}$ alors : $x=X+\frac{\pi}{2}$

Donc : $x\to\frac{\pi}{2}$ équivaut à $X\to0$,

On a : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+X\right)=\cos X$ et $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2=X^2$

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim\limits_{X\to0}\frac{1-\cos X}{X^2}=\frac{1}{2}$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}$:

On pose : $X=x-\frac{\pi}{4}$ alors : $x+\frac{\pi}{4}=X+\frac{\pi}{2}$

Donc : $x\to\frac{\pi}{4}$ équivaut à $X\to0$,

On a : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+X\right)=-\sin X$

et $\sqrt{2}-2\sin x=\sqrt{2}-2\sin\left(X+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\left(X+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin X\cos\frac{\pi}{4}-\cos X\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin X-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos X\right)=\sqrt{2}(1-\cos X-\sin X)$$

Par suite : $\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}=\frac{-\sin x}{\sqrt{2}(1-\cos X-\sin X)}=\frac{-\frac{\sin X}{X}}{\sqrt{2}\left(\frac{1-\cos X}{X}-\frac{\sin X}{X}\right)}$

Or $\lim\limits_{X\to0}\frac{\sin X}{X}=1$ et $\lim\limits_{X\to0}\frac{1-\cos X}{X}=\lim\limits_{X\to0}\left(\frac{1-\cos X}{X^2}\right)\times X=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}=\lim\limits_{X\to0}\frac{-\frac{\sin X}{X}}{\sqrt{2}\left(\frac{1-\cos X}{X}-\frac{\sin X}{X}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 17

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}$:

Soit x un réel de $]0;\frac{\pi}{2}[$, on a : $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}=\dfrac{\frac{\sin(2x)}{x}}{\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}}=\dfrac{\frac{\sin(2x)}{x}}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(2x)}{x}=2$ par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{\sin(2x)}{x}}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}=2\sqrt{2}$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}=2\sqrt{2}$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$:

On pose : $h=x-2$ c'est-à-dire : $x=h+2$

Donc : $x\to 2$ équivaut à $h\to 0$.

On a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}h+\pi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)$

et $\sqrt{x}-\sqrt{2}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\dfrac{h}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}}$

Par suite : $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}{\frac{h}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}}}=(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})\times\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}{h}$

Puisque : $\lim\limits_{h\to 0}(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}{h}=\dfrac{\pi}{2}$

alors : $\lim\limits_{h\to 0}(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})\times\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}{h}=\pi\sqrt{2}$

D'où : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{h\to 0}(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})\times\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}{h}=\pi\sqrt{2}$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1-\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}\right)$:

On utilise le conjugué du numérateur, on aura :

ProfSalmi.blogspot.com

$$\frac{1-\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}=\frac{1-\cos(2x)}{x^2(1+\sqrt{\cos(2x)})}=\left(\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{\cos(2x)}}\right)$$
$$=\frac{4}{1+\sqrt{\cos(2x)}}\left(\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}\right)$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{4}{1+\sqrt{\cos(2x)}}=\frac{4}{2}=2$

D'autre part, on pose : $X=2x$ alors : $x\to 0^+$ équivaut à $X\to 0^+$.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}=\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{1-\cos X}{X^2}=\frac{1}{2}$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{4}{1+\sqrt{\cos(2x)}}\left(\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}\right)=1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}\right)=1$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)}\right)$:

On pose : $h=x-1$, c'est-à-dire : $x=h+1$

Alors : $x\to 1$ équivaut à $h\to 0$

On a : $\sin(\pi x)=\sin(\pi+\pi h)=-\sin(\pi h)$

Donc : $\frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)}=\frac{-h(h+1)}{-\sin(\pi h)}=(h+1)\times\frac{h}{\sin(\pi h)}$

Puisque : $\lim\limits_{h\to 0}(h+1)=1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{\sin(\pi h)}=\frac{1}{\pi}$

Alors : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)}=\lim\limits_{h\to 0}(h+1)\times\frac{h}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{\pi}$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}}{x}\right)$:

On utilise le conjugué du numérateur, on aura :

ProfSalmi.blogspot.com

$$\frac{\cos x-\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}}{x}=\frac{\cos^2(x)-1-\frac{1}{2}\sin x}{x\left(\cos x+\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\cos x+\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}}\left(\frac{\cos^2(x)-1}{x}-\frac{1}{2}\times\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos x+\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}}\left(\frac{-\sin^2 x}{x}-\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}}=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}}\right)\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\sin x\right)=-\dfrac{1}{4}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x}}{x}\right)=-\dfrac{1}{4}$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$:

On pose : $h=x-1$ c'est-à-dire : $x=h+1$

Alors : $x\to 1$ équivaut à $h\to 0$

On a : $x^2+x-2=(x-1)(x+2)=h(h+3)$

et $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}h\right)=-\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}$

Donc : $(x^2+x-2)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)=-(h+3)\times\dfrac{h}{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}$

Puisque : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}=\dfrac{2}{\pi}$ et $\lim\limits_{h\to 0}-(h+3)=-3$

Alors : $\lim\limits_{h\to 0}\left(-(h+3)\times\dfrac{h}{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}\right)=-\dfrac{6}{\pi}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(-(h+3)\times\dfrac{h}{\tan\left(\frac{\pi}{2}h\right)}\right)=-\dfrac{6}{\pi}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 18

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}-1}\right)$:

Soit x un réel positif et différent de 1, on a :

$$x-1=(\sqrt{x})^2-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$$

et $x\sqrt{x}-1=(\sqrt{x})^3-1=(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$

Alors : $\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}=\dfrac{2}{3}$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x}-5x^2)$:

Soit x un réel strictement positif, on a : $x\sqrt{x}-5x^2=x^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-5\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-5\right)=-5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-5\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x}-5x^2)=-\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-3x}{x-\sqrt{x}}\right)$:

Soit x un réel strictement supérieur à 1, on a :

$$\frac{1-3x}{x-\sqrt{x}}=\frac{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{\frac{1}{x}-3}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3\right)=-3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=-3$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-3x}{x-\sqrt{x}}\right)=-3$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x}-x+1}{x^2+x\sqrt{x}}\right)$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

ProfSalmi.blogspot.com

$$\frac{x\sqrt{x}-x+1}{x^2+x\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{x}}=1$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=0$, par produit.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}-x+1}{x^2+x\sqrt{x}}\right)=0$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=-1$ (car $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$)

Alors : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)=0$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x\sqrt{x}+x}{x-\sqrt{x}}\right)$:

Soit x un réel de $]1;+\infty[$, on a :

$$\frac{1-x\sqrt{x}+x}{x-\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\sqrt{x}\left(\frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}-1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}-1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=-1$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}-1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x\sqrt{x}+x}{x-\sqrt{x}}\right)=-\infty$

Exercice 19

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{1+x})$:

Soit x un réel strictement positif, on a : $2x-\sqrt{1+x}=x\left(2-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=0$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=2$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{1+x})=+\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2-x}+3x)$:

Soit x un réel strictement négatif, on a :

$\sqrt{2-x}+3x=x\left(\frac{\sqrt{2-x}}{x}+3\right)=x\left(-\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}+3\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(3-\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2-x}+3x)=-\infty$

Info :

$(\forall x\in\mathbb{R}^-);\ \sqrt{x^2}=-x$

$(\forall x\in\mathbb{R}^-);\ x=-\sqrt{x^2}$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}\right)$:

Soit x un réel de $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ et $x\neq0$.

On utilise le conjugué du numérateur, on aura :

ProfSalmi.blogspot.com

$$\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}=\frac{1+3x-(1+x)}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{x+1})}=\frac{2}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1+x}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+3x}+\sqrt{1+x}=2$ alors : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1+x}}=1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}=1$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{2-\sqrt{x+2}}\right)$:

On utilise le conjugué : $\sqrt{A}-B=\frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$

Soit $\sqrt{x+7}-3=\frac{x+7-9}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}$ et $2-\sqrt{x+2}=\frac{-(x-2)}{2+\sqrt{x+2}}$

Donc : $\frac{\sqrt{x+7}-3}{2-\sqrt{x+2}}=\frac{-(2+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+7}+3}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{-(2+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+7}+3}\right)=-\frac{2}{3}$ alors : $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{2-\sqrt{x+2}}\right)=-\frac{2}{3}$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-x+1-\sqrt{2x+1})$:

Méthode :

$P(x)$ est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1.

Pour calculer une limite de type : $\lim\limits_{\infty}(P(x)+k\sqrt{ax+b})$, on factorise par x ou on pose : $X=\sqrt{ax+b}$

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$2x^2-x+1-\sqrt{2x+1}=x\left(2x-1+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-x+1-\sqrt{2x+1})=+\infty$

Exercice 20

Méthode :

Pour calculer une limite de type : $\lim\limits_{\infty}(\sqrt{ax+b}-\sqrt{a'x+b'})$

Si $a\neq a'$ alors on factorise par : $\sqrt{|x|}$.

Si $a=a'$ alors on utilise le conjugué : $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

ProfSalmi.blogspot.com

Remarque : pour tout $x > 0$

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1})$:

On a: $a \neq a'$

Soit x un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a :

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1} = \sqrt{x}\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{2}-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\sqrt{2}-1 > 0$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = +\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}) = +\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1})$:

Soit $x \in [1;+\infty[$, on a :

$$\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1} = \sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-4} = \frac{5}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-4}} \text{ (On a: } a = a')$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-4} = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-4}} = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1}) = 0$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x})$:

Soit $x \in]-\infty;0[$, on a : $\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x} = \sqrt{-x}\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-x}}-\frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{-x}}\right)$

$$= \sqrt{-x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{2-\frac{1}{x}} = 1-\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2} < 0$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right) = -\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}) = -\infty$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-2x}-\sqrt{2}\sqrt{-x})$:

Soit $x \in]-\infty;0[$, on a :

$$\sqrt{1-2x}-\sqrt{2}\sqrt{-x} = \sqrt{1-2x}-\sqrt{-2x} = \frac{1}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{-2x}} \text{ (on a: } a = a')$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x}) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{-2x}} = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-2x}-\sqrt{2}\sqrt{-x}) = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 21

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{1+x^2})$:

Soit x un réel strictement positif ($x>0$ donc : $\sqrt{x^2}=|x|=x$)

On a : $2x-\sqrt{1+x^2}=2x-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}=2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{1+x^2})=+\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{3x^2+1})$:

Soit x un réel strictement négatif ($x<0$ donc : $\sqrt{x^2}=|x|=-x$)

On a : $x+\sqrt{3x^2+1}=x\left(1+\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x}\right)=x\left(1-\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2}}\right)=x\left(1-\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)=3$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{3}$

Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}\right)=1-\sqrt{3}$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $1-\sqrt{3}<0$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{3x^2+1})=+\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$:

Méthode : on utilise le conjugué.

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\sqrt{x^2-x+1}-x=\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$
$$=\frac{(x^2-x+1)-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

Sous cette forme, c'est encore une forme indéterminée du type « $\frac{-\infty}{+\infty}$ », il suffit dans ce cas de factoriser par x au numérateur et au dénomérateur puis simplifier par x : ($x>0$ donc $\sqrt{x^2}=|x|=x$).

ProfSalmi.blogspot.com

$$\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=-\frac{1}{2}$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x-1)$:

Soit x un réel strictement négatif, on a :

$$(\sqrt{4x^2+1}+2x)-1=\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}-1=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}-1$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^2+1)=+\infty$),

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}-2x=+\infty$ par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}=0$

d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}-1\right)=-1$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}-2x-1)=-1$$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}=\frac{(x^2+x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ alors :

ProfSalmi.blogspot.com

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$

par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=2$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})=\frac{1}{2}$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})$:

Soit x un réel strictement négatif, ($x<0$ donc : $\sqrt{x^2}=|x|=-x$), on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}&=|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\&=|x|\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\\&=-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ alors :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt{2}-1$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\sqrt{2}-1<0$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})=-\infty$

Exercice 22

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3+x+1}-3x)$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

$\sqrt{x^3+x+1}-3x=|x|\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3x$

Or $|x|=x$ alors : $\sqrt{x^3+x+1}-3x=x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=+\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)=+\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)=+\infty$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^3+x+1}-3x)=+\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x^3)$:

Remarque : En général on commence par un calcul direct pour voir si c'est une forme indéterminée ou non.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+1=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x^3)=+\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x)$:

Méthode : On utilise le conjugué, en écrivant $2x$ sous la forme $x+x$.

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x&=(\sqrt{x^2-x}-x)+(\sqrt{x^2+x}-x)\\&=\frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}+\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\&=\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\&=\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}+\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\quad (x>0 \text{ donc : } |x|=x)\\&=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\end{aligned}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)=-\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)=\frac{1}{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$

par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=2$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})=\frac{1}{2}$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})$:

Soit x un réel strictement négatif, ($x<0$ donc : $\sqrt{x^2}=|x|=-x$), on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}&=|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\&=|x|\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\\&=-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ alors :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt{2}-1$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\sqrt{2}-1<0$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})=-\infty$

Exercice 22

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3+x+1}-3x)$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

$\sqrt{x^3+x+1}-3x=|x|\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3x$

Or $|x|=x$ alors : $\sqrt{x^3+x+1}-3x=x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=+\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)=+\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)=+\infty$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^3+x+1}-3x)=+\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x^3)$:

Remarque : En général on commence par un calcul direct pour voir si c'est une forme indéterminée ou non.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+1=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x^3)=+\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x)$:

Méthode : On utilise le conjugué, en écrivant $2x$ sous la forme $x+x$.

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x&=(\sqrt{x^2-x}-x)+(\sqrt{x^2+x}-x)\\&=\frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}+\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\&=\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\&=\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}+\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\quad (x>0 \text{ donc : } |x|=x)\\&=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\end{aligned}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)=-\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)=\frac{1}{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)=0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x)=0$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1})$:

Méthode 1: On factorise par $\sqrt{x}$. (ou par x)

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}&=\sqrt{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\\&=\sqrt{x}\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\\&=\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\end{aligned}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=1$

par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=+\infty$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1})=+\infty$

Méthode 2: On utilise le conjugué puis on factorise par x .

Soit x un réel strictement positif, $(x>0$ donc : $\sqrt{x^2}=|x|=x)$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}&=\frac{(x^2+1)-(x+1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{x(x-1)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\\&=\frac{x(x-1)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{x-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\end{aligned}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\right)=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{1}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{0}=0$ par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=1$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)=+\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1})=+\infty$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-3x}{x+1}\right)$:

Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-3x}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-\frac{3x}{x+1}=\sqrt{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}-\frac{3x}{x+1}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1)=1$ alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}=\sqrt{1}=1$$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3)=-3$

Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}}-\dfrac{3x}{x+1}=-2$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-3x}{x+1}\right)=-2$

Méthode 2:

Soit $x\in]0;+\infty[$

on a: $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-3x}{x+1}=\dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3}{1+\frac{1}{x}}$

Puis on en deduit la limite

6) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+x}\right)$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+x}=\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+x}=\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+x}=\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\dfrac{1}{x^2}\right)=4$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{4}=2$ par suite :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+1\right)=3$$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)=3$ donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+1}\right)=\dfrac{3}{3}=1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+x}\right)=1$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 23

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+\sqrt{x}}\right)$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1}{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt{1}=1$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=1$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=0$, par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+\sqrt{x}}\right)=0$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x-1}\right)$:

Soit x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a :

$$\frac{x\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{x\left(\sqrt{x+1}-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}\right)=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x-1}\right)=+\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x\sqrt{x}}{x^2-1}\right)$:

Soit x un réel de $]1;+\infty[$, on a : $\dfrac{x^2-x\sqrt{x}}{x^2-1}=\dfrac{x^2\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x^2}}$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2}=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x\sqrt{x}}{x^2-1}\right)=1$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$:

Soit x un réel de $]0;+\infty[$, on a :

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{(x+\sqrt{x})-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{x}}=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$ par suite :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1=2$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\frac{1}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}\right)$:

Soit x un réel de $]0;+\infty[$, on a :

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{(x+\sqrt{x})-x}=\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}\right)=+\infty$

ou d'apés la question 4)

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\sqrt{x}\right)$:

Soit x un réel de $]0;+\infty[$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\sqrt{x}=\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}-\sqrt{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{x}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}=\sqrt{1}=1$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\sqrt{x})=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-\sqrt{x}=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\sqrt{x}\right)=-\infty$

Exercice 24

1) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}\cdot\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}\right)$:

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;-1[$, on a : $x<-1\Rightarrow x+1<0$ alors :

$x+1=-\sqrt{(x+1)^2}$

et on a : $x^2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^3+1}{x}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x}$

Par suite : $\dfrac{1}{x(x+1)}\cdot\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2}}\times\sqrt{\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x}}$

$$=-\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)^2}}$$

$$=-\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x(x+1)}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-x+1)=3$ et $\lim\limits_{x\to-1}x(x+1)=0$

Tableau de signe de $x(x+1)$:

On a : $x(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

alors :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x(x+1)$	+	0	-	0	+

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}x(x+1)=0^+$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{x^2-x+1}{x(x+1)} = +\infty$ par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x(x+1)}} = +\infty$

Comme : $\lim\limits_{x\to -1}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\left(-\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x(x+1)}}\right) = +\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}\cdot\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}\right) = +\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}\right)$:

Directement, on obtient une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ », il suffit de factoriser par $(x-3)$ au numérateur et au dénominateur puis simplifier :

Soit x un réel de $]-1;+\infty[$ et $x\neq 3$, $x\neq 0$, on a : $x^2-3x = x(x-3)$

et $x-1-\sqrt{x+1} = \dfrac{(x-1-\sqrt{x+1})(x-1+\sqrt{x+1})}{x-1+\sqrt{1+x}} = \dfrac{(x-1)^2-(x+1)}{x-1+\sqrt{x+1}}$

$= \dfrac{x^2-3x}{x-1+\sqrt{x+1}} = \dfrac{x(x-3)}{x-1+\sqrt{x+1}}$

Donc : $\dfrac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}} = \dfrac{x(x-3)(x-1+\sqrt{x+1})}{x(x-3)} = x-1+\sqrt{x+1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 3} x-1+\sqrt{x+1} = 4$ alors : $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-3x}{x-1+\sqrt{x+1}}\right) = 4$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\right)$:

Directement, on obtient une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ », il suffit de factoriser par $(x-1)$ ou $(\sqrt{x}-1)$ au numérateur puis simplifier.

Soit x un réel de $]0;+\infty[$ et $x\neq 1$ on a :

$x-3\sqrt{x}+2 = (\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+2 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$

Remarque : $aX^2+bX+c=0$ (E)

Si $a\neq 0$ et $a+b+c=0$ alors : 1 et $\dfrac{c}{a}$ sont les solutions de (E).

Donc : $\dfrac{x-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-2$

On a : $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}-2) = -1$ donc : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) = -1$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4}\right)$:

ProfSalmi.blogspot.com

Soit x un réel de l'intervalle $[0;4[$, on a :

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4}=\frac{2-\sqrt{x}}{(x-4)\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\frac{-(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\frac{-1}{(\sqrt{x}+2)\sqrt{2-\sqrt{x}}}$$

On a : $0\le x<4\Rightarrow\sqrt{x}<2$

$\Rightarrow 2-\sqrt{x}>0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{2-\sqrt{x}}=0^+$ par suite : $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x}}}=+\infty$

et comme $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\frac{-1}{\sqrt{x}+2}\right)=-\frac{1}{4}$ alors : $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\frac{-1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2-\sqrt{x}})}\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4}\right)=-\infty$

5) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\left(\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}\right)$:

Directement, on obtient une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ »,

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;-2[$, on a :

$$\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}+1=\frac{x(x+2)}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}+1=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}+1$$

Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\sqrt{x^2+2x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to -2}(x)=-2$ alors : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}\right)=-\infty$

Par suite : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}+1\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\left(\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}\right)=-\infty$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}\right)$:

Soit x un réel de $]1;+\infty[$, $(x>1\Rightarrow x-1>0$ alors : $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$

$$\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1}+2=\sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}}+2=\sqrt{\frac{x}{x-1}}+2$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1}x=1$ alors : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=+\infty$ par suite : $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x}{x-1}}+2=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}\right)=+\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 25

Déterminons les limites par lecture graphique :

D'après la lecture graphique on a :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

3) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 3 = f(-1)$

6) Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et f est négative au voisinage de $+\infty$, (la courbe représentative de f est sous l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$).

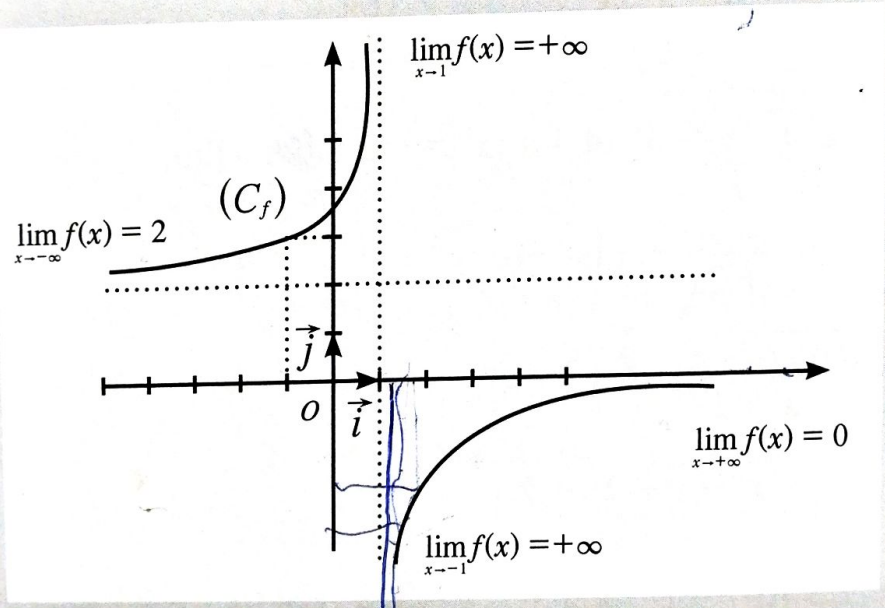
7) Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)-2}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 2 = 0$

De plus $f(x) > 2$ au voisinage de $-\infty$, car la courbe de f se situe au dessus de la droite $(D): y = 2$ au voisinage de $-\infty$,

d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 2) = 0^+$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)-2} = +\infty$



Exercice 26

Déterminons l'ensemble de définition :

D'après le graphique, on remarque que les deux nombres 0 et -2 n'ont pas d'image par f,

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{0; -2\} = \mathbb{R}^* - \{-2\}$

$=]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; +\infty[$

ProfSalmi.blogspot.com

2) Au voisinage de $+\infty$; la courbe de f s'approche de la droite (D_f) d'équation : $y=-1$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

3) Au voisinage de $-\infty$; la courbe de f s'approche de l'axe des abscisses; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ **5)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

6) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$ (sur l'intervalle $]-2;-1[$ la courbe de f est au dessus de l'axe des abscisses, et s'approche de la droite (D_2) d'équation $x=-2$)

7) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ et (C_f) la courbe de f se trouve au dessus de la droite (D_1) d'équation $y=-1$.

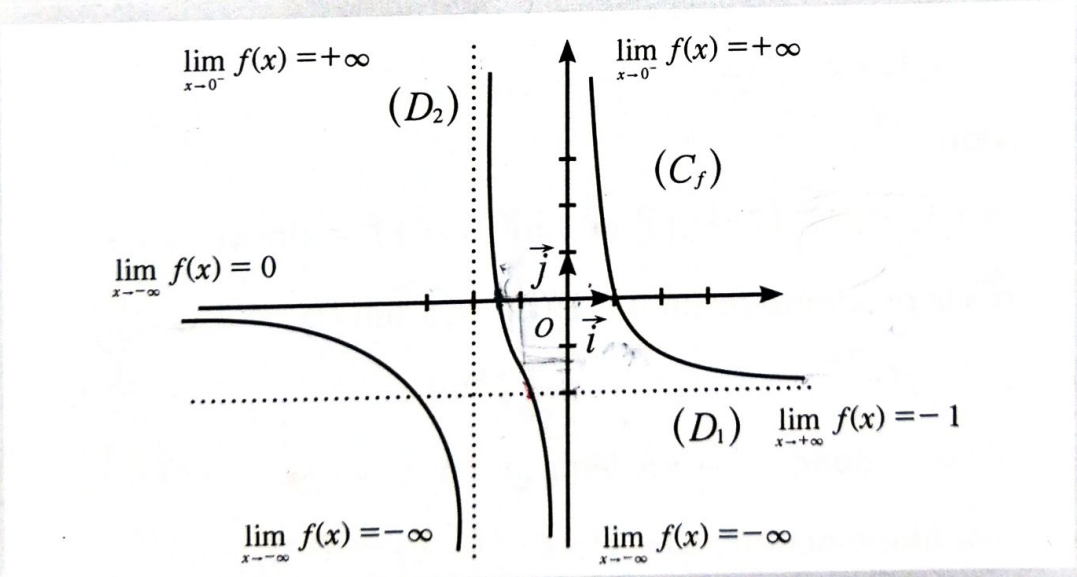
d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+1)=0^+$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+1}=+\infty$

9) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$ (car (C_f) se trouve au dessous de l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$)

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

10) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$ **11)** $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0=f(-1)$



Exercice 27

Limites et ordre

1) • Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,2x-4\le 2x-1+3\cos x$

Soit x un réel, on a : $-1\le\cos x\le 1$ équivaut à : $-3\le 3\cos x\le 3$

ProfSalmi.blogspot.com

donc : $(2x-1)-3 \leq 2x-1+3\cos x$ c'est-à-dire : $2x-4 \leq 2x-1+3\cos x$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2x-4 \leq 2x-1+3\cos x$

• Déduction :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2x-1+3\cos x \geq 2x-4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$

Donc, d'après la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1+3\cos x) = +\infty$

2) a) Montrons que f est une fonction paire:

On a : $f(x) = 4x^2 - 4x\sin(x) + 1$, alors : $D_f = \mathbb{R}$

(car toute fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction *sin*)

Comme : • $(\forall x \in D_f);(-x \in D_f)$

et • $(\forall x \in D_f) ; f(-x) = 4(-x)^2 - 4(-x)\sin(-x) + 1$

$= 4x^2 - 4x\sin(x) + 1 = f(x)$

alors: f est une fonction paire.

b) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; f(x) \geq (2x-1)^2$

Soit x un réel positif, on a : $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-4x \leq 0$,

donc: $-4x \leq -4x\sin x \leq 4x$

Par suite : $4x^2 + 1 - 4x \leq 4x^2 + 1 - 4x\sin x$, c'est-à-dire : $(2x-1)^2 \leq f(x)$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; f(x) \geq (2x-1)^2$

c) Déduction :

On a : $(\forall x > 0) ; f(x) \geq (2x-1)^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$

Donc, d'après la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On pose : $X = -x$ donc : $x \to -\infty$ équivaut à $X \to +\infty$

Puisque f est une fonction paire, alors : $f(-X) = f(X)$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} f(-X) = \lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = +\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 28

1) Montrons que : $(\forall x > 0); \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{x^2}$

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} - \frac{1}{2} = \frac{2x - x - \sqrt{1+x^2}}{2(\sqrt{1+x^2}+x)} = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{2(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \frac{x^2 - (1+x^2)}{2(x+\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{-1}{2(x+\sqrt{1+x^2})^2}$$

Donc : $\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-1}{2(x+\sqrt{1+x^2})^2} \right| = \frac{1}{2(x+\sqrt{1+x^2})^2}$

Il suffit de prouver que : $2(x+\sqrt{1+x^2})^2 > x^2$

En effet on a : $\sqrt{1+x^2} > 0$ alors : $x + \sqrt{1+x^2} > x > 0$

Puisque la fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

alors : $(x+\sqrt{1+x^2})^2 > x^2$, donc : $2(x+\sqrt{1+x^2})^2 > 2x^2$ par suite :

$2(x+\sqrt{1+x^2})^2 > x^2 > 0$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); 2x^2 > x^2$)

D'où : $\frac{1}{2(x+\sqrt{1+x^2})^2} < \frac{1}{x^2}$ Ainsi : $(\forall x > 0); \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{x^2}$

2) Déduction :

On a : $(\forall x > 0); \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$,

donc d'après la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Exercice 29

1) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x+2} \right)$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\frac{x\sqrt{x}+1}{x+2} = \frac{x\sqrt{x}}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \left(\frac{x}{x+2} \right)\sqrt{x} + \frac{1}{x+2}$$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, alors :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)\sqrt{x} = +\infty$

et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$

Par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)\sqrt{x} + \frac{1}{x+1} = +\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+2}\right)=+\infty$

ou bien $\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+2}=\dfrac{x\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+2}=\lim\dfrac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=+\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-5}{x\sqrt{x}}\right)$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\frac{x^2-5}{x\sqrt{x}}=\frac{x^2}{x\sqrt{x}}-\frac{5}{x\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x\sqrt{x}}=\sqrt{x}-\frac{5}{x\sqrt{x}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5}{x\sqrt{x}}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\dfrac{-5}{x\sqrt{x}}=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-5}{x\sqrt{x}}\right)=+\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+100}}{x+1}\right)$:

Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\frac{\sqrt{x+100}}{x+1}=\sqrt{\frac{x+100}{(x+1)^2}}=\sqrt{\frac{x+100}{x^2+2x+1}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+100}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+100}{x^2+2x+1}}=\sqrt{0}=0$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+100}}{x+1}\right)=0$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}$

Soit x un réel positif, on a : $x+a>0$ et $x+b>0$

alors : $\dfrac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}=\sqrt{\dfrac{x+a}{x+b}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+a}{x+b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x+a}{x+b}}=\sqrt{1}=1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}=1$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 30

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}$:

Soit x un réel positif et différent de 1, on a : $\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1}=-\sqrt{x}$

Comme $\lim\limits_{x\to 1}(-\sqrt{x})=-1$ alors : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}=-1$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$:

Soit x un réel de l'intervalle $[-1;+\infty[$ et différent de 3, on a :

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\sqrt{x+1}+2$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)=4$ alors : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=4$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}$:

Soit x un réel positif et différent de 9; on a :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}&=\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x+7}+4)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x+7}-4)(\sqrt{x+7}+4)}\\&=\frac{(x-9)(\sqrt{x+7}+4)}{(\sqrt{x}+3)(x+7-16)}\\&=\frac{(x-9)(\sqrt{x+7}+4)}{(\sqrt{x}+3)(x-9)}=\frac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x}+3}\end{aligned}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$ alors : $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}=\dfrac{4}{3}$

Exercice 31

1) Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

Soit x un réel, on a : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x}}$

alors : $x\in D \iff x^2+1\geq 0$ et $x\geq 0$ et $x-\sqrt{x}\neq 0$

$\iff x\geq 0$ et $x-\sqrt{x}\neq 0$

Car: la proposition $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,x^2+1\geq 0$ est vraie.

Résolvons dans l'intervalle $[0;+\infty[$ l'équation : $x-\sqrt{x}=0$.

ProfSalmi.blogspot.com

Soit $x \geq 0$ on a : $x - \sqrt{x} = 0 \iff \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$

$\iff \sqrt{x} = 0$ ou $\sqrt{x} = 1$

$\iff x = 0$ ou $x = 1$.

Donc : $x \in D \iff x \in [0; +\infty[$ et $x \neq 0$ et $x \neq 1$

$\iff x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$

D'où : $D =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

2) • Calculons $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

Soit x un réel de D, on a : $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})(x + \sqrt{x})}{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})}$

$= \dfrac{(x^2 + 1 - 2)(x + \sqrt{x})}{(x^2 - x)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})}$

$= \dfrac{(x-1)(x+1)(x+\sqrt{2})}{x(x-1)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})}$

$= \dfrac{(x+1)(x+\sqrt{x})}{x(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})}$

Or : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x+\sqrt{x})}{x(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})} = \dfrac{(1+1)(1+\sqrt{1})}{1(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \sqrt{2}$

• Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$:

On a : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x - \sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x - \sqrt{x} = 0$

Déterminons le signe de $x - \sqrt{x}$:

On a : $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

$= \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1}$

$= \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}(x - 1)$

Info : sur $]0; 1[$; $\sqrt{x} - 1 < 0$ et $\sqrt{x} > 0$

Alors le signe de $(x - \sqrt{x})$ est celui de $(x - 1)$.

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} (x - \sqrt{x}) = 0^-$

ProfSalmi.blogspot.com

et puisque : $1-\sqrt{2}<$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x}}=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

Soit $x\in D$, on a :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}}{x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}=\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Exercice 32

a) Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a: (on utilise le conjugué)

$$\frac{x^2-x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x-\sqrt{1+x^2})=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{x^2-(1+x^2)}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}\times\left(\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\times\left(\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$)

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=0$

Et on a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$)

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)=0$

b) Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)$

- Soit un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a:

ProfSalmi.blogspot.com

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}=1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=2$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)=2$.

c) Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}\right)$

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;0[$, on a:

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

Donc: $\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Et on a: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$

Déterminos le signe de $\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\left(1+\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $-\infty$

Soit x un réel de $]-\infty;-1[$, on a :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\left(1+\frac{1}{x}\right)>0\Longleftrightarrow\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}>1+\frac{1}{x}$$

Or $x\in]-\infty;-1[$ alors $\frac{1}{x}+1>0$ (le signe de $\frac{x+1}{x}$ est positif sur $]-\infty;-1[$)

Donc: $\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}>1+\frac{1}{x}\Longleftrightarrow 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$

$$\Longleftrightarrow 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{x}<0$$

ProfSalmi.blogspot.com

et puisque: $(\forall x \in]-\infty;-1[); \frac{1}{x} < 0$ est une proposition vraie

alors la proposition: $(\forall x \in]-\infty;-1[); \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$ est vraie.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \left(1+\frac{1}{x}\right) = 0^+$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \left(1+\frac{1}{x}\right)} \right) = +\infty$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x+x^2}} \right) = +\infty$

2ème Méthode:

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1))}{(\sqrt{x^2+x+1}+x+1)(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1))}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+x+1}(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1))}{(x^2+x+1)-(x+1)^2}$$
$$= \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1))}{-x}$$
$$= \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1))$$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$

et on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$

et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -(x+1) = +\infty$; donc: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1) = +\infty$

Par suite: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)) = +\infty$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+1} = +\infty$

Exercice 33

1) Déterminons D_f l'ensemble de définition de f

Soit x un réel, on a: $f(x) = \frac{2x^2-|x^2-4x|+3}{x^2+x}$ alors:

ProfSalmi.blogspot.com

$$x \in D_f \iff x^2 + x \neq 0$$
$$\iff x(x+1) \neq 0$$
$$\iff x \neq 0 \text{ et } x \neq -1$$
$$\iff x \in \mathbb{R} - \{0; -1\}$$

Donc: $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$

2) Expression de $f(x)$ sans valeur absolue

Déterminons d'abord le signe de $x^2 - 4x$

On a: $x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 4$$

alors le tableau de signe de $x^2 - 4x$ est:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x^2 - 4x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

C'est-à-dire: $|x^2 - 4x| = x^2 - 4x \iff x \in]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$

et $|x^2 - 4x| = 4x - x^2 \iff x \in [0; 4]$

Par conséquent:

- Si: $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup [4; +\infty[$ alors:

$$f(x) = \frac{2x^2 - (x^2 - 4x) + 3}{x^2 + x} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x} = \frac{x+3}{x}$$

- Si: $x \in]0; 4]$ alors: $f(x) = \dfrac{2x^2 + x^2 - 4x + 3}{x^2 + x} = \dfrac{3x^2 - 4x + 3}{x^2 + x}$

3) Déterminons les limites de f aux bornes de D_f.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right) = 1$

- $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$:

On a: $(\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[); f(x) = \dfrac{x+3}{x}$

Donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x+3}{x}\right) = -2$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$:

Soit x un réel de $]0; 4]$; on a: $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 3}{x^2 + x} = \dfrac{3x^2 - 4x + 3}{x(x+1)}$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0+} 3x^2-4x+3=3$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x(x+1)=0^+$ (car $x(x+1)>0$ sur $]0;4]$

alors: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2-4x+3}{x(x+1)}=+\infty$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$:

Soit x un réel de l'intervalle $]-1;0[$, on a: $f(x)=\dfrac{x+3}{x}=1+\dfrac{3}{x}$.

Or : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=-\infty$ donc: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

Exercice 34

1) Déterminons D l'ensemble de définition de f.

Soit x un réel , on a: $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}}$, alors :

$x\in D \iff 1+x^2\geq 0$ et $2x\geq 0$ et $x\geq 0$ et $x-\sqrt{x}\neq 0$

$\iff x\geq 0$ et $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\neq 0$

$\iff x\geq 0$ et $x\neq 0$ et $x\neq 1$

$\iff x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

Donc: $D=]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) • Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}}=\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{2}{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$

alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{2}{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

• Calculons: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $]0;1[$, on a:

ProfSalmi.blogspot.com

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0$ avec $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)<0$

pour $x\in\,]0;1[$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}}=-\infty$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$

3) Montrons que f admet une limite finie en 1.

Soit x un élément de D , on a:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x})}=\frac{(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x})}$$
$$=\frac{(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x})}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x})}$$

donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x})}=\dfrac{0\times 2}{2\times\sqrt{2}}=0$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$

Exercice 35

a) Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+2x)$ (on utilise la factorision)

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;-1]$, on a:

$$\sqrt{x^2-1}+2x=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+2x=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x$$
$$=-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x$$
$$=x\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

Comme: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{1}=1$

Par suite: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)=1$

Et on a: $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(2-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)=-\infty$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

b) Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x$ (on utilise la technique de la mutiplication par l'expression conjuguée)

ProfSalmi.blogspot.com

Soit x un réel strictement négatif, on a:

$$\sqrt{4x^2+7}+2x=\frac{(\sqrt{4x^2+7}+2x)(\sqrt{4x^2+7}-2x)}{\sqrt{4x^2+7}-2x}$$
$$=\frac{4x^2+7-4x^2}{\sqrt{4x^2+7}-2x}$$
$$=\frac{7}{\sqrt{4x^2+7}-2x}$$

Comme: $\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2+7=+\infty$ alors: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}-2x=+\infty$

Par suite: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{\sqrt{4x^2+7}-2x}=0$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x=0$

c) Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx$ où: $a>0$, $b>0$ et $c>0$

Soit x un réel strictement négatif , on a:

$$\sqrt{ax^2+b}+cx=\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x^2}\right)}+cx \quad =|x|\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}+cx$$
$$=-x\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}+cx \quad =x\left(c-\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}\right)$$

(car : $\sqrt{x^2}=|x|$ et $x<0$)

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\frac{b}{x^2}\right)=a$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}=\sqrt{a}$

Par suite: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(c-\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}\right)=c-\sqrt{a}$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, par conséquent on a:

- Si $c>\sqrt{a}$ (c'est-à-dire $c-\sqrt{a}>0$) alors: $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(c-\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}\right)=-\infty$
- Si $0<c<\sqrt{a}$ (c'est-à-dire $c-\sqrt{a}<0$) alors: $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(c-\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}\right)=+\infty$
- Si $c=\sqrt{a}$ on a: une forme inditerminée du type "$0\times\infty$"

(on utilise le conjugué).

$$\sqrt{ax^2+b}+cx=\sqrt{ax^2+b}+\sqrt{a}x$$
$$=\frac{ax^2+b-ax^2}{\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{a}x}=\frac{b}{\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{a}x}$$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{a}x=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{b}{\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{a}x}=0$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=0$

Conclusion:

- Si : $c=\sqrt{a}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=0$
- Si : $0<c<\sqrt{a}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=+\infty$
- Si: $c>\sqrt{a}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+b}+cx=-\infty$

d) Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{4x}$

Soit $x<0$, on a: $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{4x}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{-4\sqrt{x^2}}=-\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}=-\dfrac{1}{4}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

(Car: $x<0$ donc: $x=-\sqrt{x^2}$)

Puisque: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{1}=1$

Par conséquent: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{4x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{4}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-\dfrac{1}{4}$

Exercice 36

1) Déterminons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n}{x^2+x+1}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^n}{x^2+x+1}\right)$

Soit n un entier naturel non nul, on pose: $f(x)=\dfrac{x^n}{x^2+x+1}$

Comme f est une fonction rationnelle alors la limité de f en $-\infty$ et $+\infty$ est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

Par suite: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2}$

- Cas (1): Si $n=1$ alors: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

- Cas (2) Si $n=2$ alors: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}1=1$

Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

- Cas (3) Si $n>2$ alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-2}=+\infty$

Et comme $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^{n-2}$; on aura donc les cas suivants:

ProfSalmi.blogspot.com

• Si n pair alors $(n-2)$ est pair, par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Si n est impair alors $(n-2)$ impair, par suite: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-2} = -\infty$

Donc: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Conclusion:

• Si $n=1$ alors $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1} = 0$

• Si $n=2$ alors $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1} = 1$

• Si $n>2$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1} = +\infty$

• Si n est pair et $n>2$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1} = +\infty$

• Si n est impair et $n>2$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^n}{x^2+x+1} = -\infty$

2) Déterminons: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{ax^2+bx+c})$

Soit x un réel strictement positif tel que $ax^2+bx+c>0$, on a:

$$x-\sqrt{ax^2+bx+c} = x-\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)} = x-|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$$

$$= x-x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} = x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)$$

Puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}\right) = a$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}} = \sqrt{a}$

Par suite: $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}} = 1-\sqrt{a}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ alors on déduit , d'aprés les propriétés sur la limite d'un produit, que:

• Si: $1-\sqrt{a}>0$ (c'est-à-dire $0<a<1$) alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{b}{x^2}}\right) = +\infty$

• Si: $1-\sqrt{a}<0$ (c'est-à-dire $a>1$) alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}\right) = -\infty$

• Si $a=1$ alors les propriétés sur la limité d'un produit ne permet pas conclure (forme indéterminée de type "$0\times\infty$"), pour lever l'indétermination, on utilise la technique de multiplication par l'expression conjuguée.

ProfSalmi.blogspot.com

On a: $x-\sqrt{x^2+bx+c}=\dfrac{(x-\sqrt{x^2+bx+c})(x+\sqrt{x^2+bx+c})}{x+\sqrt{x^2+bx+c}}$

$$=\frac{x^2-x^2-bx-c}{x+\sqrt{x^2+bx+c}}$$

$$=\frac{x\left(-b-\frac{c}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)}$$

$$=\frac{-b-\frac{c}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}$$

Puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=\sqrt{1}=1$

Par suite: $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=2$

et on a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-b-\frac{c}{x}\right)=-b$ donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-b-\frac{c}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=-\frac{b}{2}$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2+bx+c}=-\frac{b}{2}$

Conclusion:

- Si $a=1$ alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{ax^2+bx+c})=-\frac{b}{2}$
- Si $a>1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{ax^2+bx+c})=-\infty$
- Si $0<a<1$ alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{ax^2+bx+c})=+\infty$

Exercice 37

- **Calculons :** $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$.

On a: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ x^3-x^2<h(x)<x^3+x^2$

et $\lim\limits_{x\to0+}(x^3-3x^2)=0$ et $\lim\limits_{x\to0+}(x^3+x^2)=0$

Donc , d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=0$

- **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$.

On a: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ h(x)>x^3-3x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-3x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

Donc: d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

ProfSalmi.blogspot.com

• **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x^3}$

Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a:

$x^3-3x<h(x)<x^3+x^2$ donc $\dfrac{x^3-3x}{x^3}<\dfrac{h(x)}{x^3}<\dfrac{x^3+x^2}{x^3}$, c'est-à-dire:

$1-\dfrac{3}{x}<\dfrac{h(x)}{x^3}<1+\dfrac{1}{x}$.

Puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ alors, d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x^3}=1$

Exercice 38

1) Montrons: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ |f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

Soit x un réel strictement positif , on a: $f(x)=\dfrac{2x+\cos x}{x+1}$, alors:

$$|f(x)-2|=\left|\frac{2x+\cos x}{x+1}-2\right|=\left|\frac{2x+\cos x-2x-2}{x+1}\right|=\left|\frac{\cos x-2}{x+1}\right|=\frac{|\cos x-2|}{|x+1|}$$

Or: $x>0$ alors $x+1>0$ par suite: $|x+1|=x+1$

Puisque: $|\cos x-2|\le|\cos x|+2$ et $|\cos x|\le 1$ alors $|\cos x-2|\le 3$

Par conséquent: $\dfrac{|\cos x-2|}{|x+1|}\le\dfrac{3}{x+1}$ c'est-à-dire: $|f(x)-2|\le\dfrac{3}{x+1}$

Et on a: $x+1\ge x>0$ alors $\dfrac{1}{x+1}\le\dfrac{1}{x}$ donc $\dfrac{3}{x+1}\le\dfrac{3}{x}$

par suite: $|f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

D'où: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;|f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

2) Déduction

On a: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ |f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}\right)=0$

donc, d'aprés la propriété de limites et ordre $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

Exercice 39

1) a) Montrons que: $(\forall x\in[-1;1]\setminus\{0\})\ ;\ |f(x)|\le|x|$

Soit x un réel de $[-1;1]$ et $x\neq 0$, on a:

$$|f(x)|=\left|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|=|x^2|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|=x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque: $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ alors $x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$

c'est-à-dire: $|f(x)| \leq x^2$

Or: $x \in [-1;1]\setminus\{0\}$ c'est-à-dire $|x| \leq 1$ et $x \neq 0$

donc $x^2 \leq |x|$ par suite : $|f(x)| \leq |x|$

D'où: $(\forall x \in [-1;1]\setminus\{0\})$; $|f(x)| \leq |x|$

b) Déduction:

On a: $(\forall x \in [-1;1]\setminus\{0\})$: $|f(x)| \leq |x|$ et $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$

donc, d'aprés la propriété de limites et d'ordre: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

2) Montrons que: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Soit x un réel de $]0;+\infty[$, on pose: $X = \frac{1}{x}$

donc $x \longrightarrow +\infty$ équivaut à $X \longrightarrow 0^+$

On a: $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\sin x = \frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0^+}\frac{1}{X}\left(\frac{\sin X}{X}\right) = +\infty$

Car: $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{1}{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{\sin X}{X} = 1$

Exercice 40

1) Calculons: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+3x}{\sin(3x)}\right)$

Soit x un réel tel que $\sin 3x \neq 0$ (c'est-à-dire $x \neq \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$) , on a:

$$\frac{x^2+3x}{\sin(3x)} = \frac{x^2}{\sin(3x)} + \frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{x}{3}\times\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} + \frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}}$$

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{3}\right) = 0$,

alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{3}\times\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} + \frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}}\right) = 1$

Donc: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{\sin(3x)} = 1$.

ProfSalmi.blogspot.com

Méthode 2: On a: $\dfrac{x^2+3x}{\sin(3x)} = \dfrac{3x\left(\frac{x}{3}+1\right)}{3x\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)} = \dfrac{\frac{x}{3}+1}{\frac{\sin(3x)}{3x}}$

alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{\sin(3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{3}+1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} = \dfrac{0+1}{1} = 1$

2) Calculons: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(\cos x-1)\sin x}{x^3\cos x}\right)$

Soit x un réel de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$,

on a: $\dfrac{(\cos x-1)\sin x}{x^3\cos x} = \dfrac{-1}{\cos x}\times\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{\sin x}{x}$

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1}{\cos x}\right) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1}{\cos x}\times\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{\sin x}{x}\right) = -\dfrac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(\cos x-1)\sin x}{x^3\cos x}\right) = -\dfrac{1}{2}$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right)$

On pose: $X = x-2$, c'est-à-dire $x = X+2$

On a $x \longrightarrow 2$ équivaut à $X \longrightarrow 0$ et

$$\frac{x-2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{X}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(X+2)\right)} = \frac{X}{\sin\left(\frac{\pi}{2}X+\pi\right)} = \frac{X}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)} = \frac{-X}{\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)}$$

(car $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$; $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$)

Puisque $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)}{X} = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\lim\limits_{X\to 0}\left(\dfrac{X}{\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)}\right) = \dfrac{2}{\pi}$

Par suite $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\left(\dfrac{-X}{\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)}\right) = -\dfrac{2}{\pi}$

D'où $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right) = -\dfrac{2}{\pi}$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}\right)$

On pose: $X = \dfrac{\pi}{2}-x$ c'est-à-dire $x = \dfrac{\pi}{2}-X$ et on a:

ProfSalmi.blogspot.com

$x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ équivaut à $X \longrightarrow 0$

Puisque $\pi - 2x = 2X$ alors $\frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2} = \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-X\right)}{(2X)^2} = \frac{1-\cos X}{4X^2}$

(car $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ pour tout réel α)

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\left(\frac{1-\cos X}{4X^2}\right) = \lim\limits_{X\to 0}\left(\frac{1-\cos X}{X^2}\times\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

(car $\lim\limits_{X\to 0}\frac{1-\cos X}{X^2} = \frac{1}{2}$)

D'où $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}\right) = \frac{1}{8}$.

Exercice 41

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x} = \frac{x}{2+x}\left(\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \frac{x}{2+x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$

Et on a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2+x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -1$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x} = -1$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

On a: $(\forall x \geq 0)$; $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x}$, puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x^2 = 1$

alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+x^2} = 1$

On a: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(2+x) = 2$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x} = -\frac{1}{2}$

C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$.

- **Calculons:** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;0[$.

ProfSalmi.blogspot.com

On utilise le conjugué du numérateur on aura:

$$f(x)=\frac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}=\frac{\cos^2 x-1-\sin x}{x(\cos x+\sqrt{1+\sin x})}$$
$$=\frac{1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\left(\frac{\cos^2 x-1}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=\frac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\left(x\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)+\frac{\sin x}{x}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\right)=-\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$

et $\lim\limits_{x\to 0-}x\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)=0\times 1=0$

alors $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\right)\left(x\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)+\frac{\sin x}{x}\right)=-\frac{1}{2}$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{1}{2}$

3) a) Montrons que: $(\forall x<0)\ ;\ |f(x)|\le\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;0[$, on a:

$$|f(x)|=\left|\frac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}\right|=\frac{|\cos x-\sqrt{1+\sin x}|}{|x|}$$

Or $|\cos x-\sqrt{1+\sin x}|\le|\cos x|+\sqrt{1+\sin x}$ (rappel: $|a-b|\le|a|+|b|$ pour tous réel a et b)

alors $|f(x)|\le\frac{|\cos x|+\sqrt{1+\sin x}}{|x|}$

Puisque : $-1\le\cos x\le 1$ et $-1\le\sin x\le 1$ alors $|\cos x|\le 1$ et $0\le 1+\sin x\le 2$

C'est-à-dire: $|\cos x|\le 1$ et $0\le\sqrt{1+\sin x}\le\sqrt{2}$.

Donc $|\cos x|+\sqrt{1+\sin x}\le 1+\sqrt{2}$ par suite $\frac{|\cos x|+\sqrt{1+\sin x}}{|x|}\le\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

D'où: $(\forall x<0)\ ;\ |f(x)|\le\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

b) Déduction:

On a: $(\forall x\in]-\infty;0[)\ ;\ |f(x)|\le\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-(1+\sqrt{2})}{x}=0$

Donc, d'aprés la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 42

1) Calculons: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}\right)$

Soit x un réel non nul, on a: $\sin x=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, alors:

$$\frac{\sin x-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}=\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)}{x\times x^2}$$

$$=-\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\times\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$=-\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\times\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{1}{4}$$

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{x}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{1-\cos X}{X^2}=\dfrac{1}{2}$

avec: $X=\dfrac{x}{2}$; $x\longrightarrow 0$ équivaut à $X\longrightarrow 0$

alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{x}\times\dfrac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\dfrac{1}{4}\right)=-2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{8}$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}\right)=-\dfrac{1}{8}$

2) Calculons: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}\right)$.

On pose: $X=x-1$ donc : $x\longrightarrow 1$ équivaut à $x\longrightarrow 0$

On a: $\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}=\dfrac{\sin(\pi(X+1))}{X}=\dfrac{\sin(\pi+\pi X)}{X}=-\dfrac{\sin(\pi X)}{X}$

Puisque: $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin(\pi X)}{X}=\pi$ alors: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}=\lim\limits_{X\to 0}\left(-\dfrac{\sin(\pi X)}{X}\right)=-\pi$

3) Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2+\cos x-x\sin x}{3x^2+1}\right)$

Remarque: On ne peut calculer directement cette limite, car les fonctions $x\longmapsto\cos x$ et $x\longmapsto\sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Soit x un réel strictement positif, on a: $-1\leq\cos x\leq 1$ (1) et $-1\leq\sin x\leq 1$

ProfSalmi.blogspot.com

puisque: $x > 0$ alors: $-x \leq x\sin x \leq x$ donc: $-x \leq -x\sin x \leq x$ (2)

Par conséquent: de (1) et (2) on déduit que: $-1-x \leq \cos(x) - x\sin x \leq 1+x$.

équivaut à : $9x^2 - x - 1 \leq 9x^2 + \cos x - x\sin x \leq 9x^2 + x + 1$.

D'où: $(\forall x > 0)$; $\dfrac{9x^2-x+1}{3x^2+1} \leq \dfrac{9x^2+\cos x - x\sin x}{3x^2+1} \leq \dfrac{9x^2+x+1}{3x^2+1}$

Puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2-x+1}{3x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2}{3x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3) = 3$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2-x+1}{3x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2}{3x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3) = 3$

alors, d'aprés les propriétés de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2+\cos x - x\sin x}{3x^2+1}\right) = 3$

4) Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$

On pose: $X = \dfrac{2}{x}$, donc: $x \longrightarrow +\infty$ équivaut à $X \longrightarrow 0^+$

On a: $x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right) = \left(\dfrac{2}{X}\right)^2(1-\cos X) = 4\left(\dfrac{1-\cos X}{X^2}\right)$

alors: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right) = \lim\limits_{X\to0^+} 4\left(\dfrac{1-\cos X}{X^2}\right) = 4\times\dfrac{1}{2} = 2$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right) = 2$

Exercice 43

1) Calculons: $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{\tan(\pi x)}{x-2}\right)$

On pose: $X = x-2$, donc: $x \longrightarrow 2$ équivaut à: $X \longrightarrow 0$

On a: $\dfrac{\tan(\pi x)}{x-2} = \dfrac{\tan(\pi(X+2))}{X} = \dfrac{\tan(\pi X + 2\pi)}{X} = \dfrac{\tan(\pi X)}{X}$

donc: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\tan(\pi x)}{x-2} = \lim\limits_{X\to0}\dfrac{\tan(\pi X)}{X} = \pi$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{\tan(\pi x)}{x-2}\right) = \pi$

2) Calculons: $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x}}$

Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a: $\dfrac{1-\cos x}{x} = x\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$

Puisque: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$ alors: $\lim\limits_{x\to0^+} x\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right) = 0$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right) = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x}}=\sqrt{0}=0$

3) Calculons: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)}{x(x+2)}\right)$

Soit x un réel différent de 0 et -2, on a:

$$\frac{\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)}{x(x+2)}=\frac{1}{x+2}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin(2x)}{x}+\frac{\sin(3x)}{x}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x}=2$

et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}=3$

alors: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+2}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\sin(2x)}{x}+\dfrac{\sin(3x)}{x}\right)=\dfrac{1}{2}(1+2+3)=3$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)}{x(x+2)}\right)=3$

Exercice 44

1) Calculons: $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{\pi}{3}\\ x>\frac{\pi}{3}}}\left(\dfrac{x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}\right)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{\pi}{3}\\ x<-\frac{\pi}{3}}}\left(\dfrac{x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}\right)$

On a: $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}}(x)=-\dfrac{\pi}{3}$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=0$

Déterminons le signe de $\sin x+\sqrt{3}\cos x$ au voisignage de $-\dfrac{\pi}{3}$

On a: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Soit x un réel de l'intervalle $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$, on a:

x	$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$
$X=x-\frac{\pi}{6}$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0
$\cos X$	-1	$-$	0	$+$	1

Conclusion:

- Si $x\in\left[-\dfrac{5\pi}{6};-\dfrac{\pi}{3}\right[$ alors: $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)<0$

ProfSalmi.blogspot.com

C'est-à-dire: $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 0$

• Si $x \in \left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right]$ alors $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) > 0$

C'est-à-dire: $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 0$

D'où: $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{3}\\ x>-\frac{\pi}{3}}}(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{3}\\ x<-\frac{\pi}{3}}}(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0^-$

Donc: $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{3}\\ x>-\frac{\pi}{3}}}\left(\frac{x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{3}\\ x<-\frac{\pi}{3}}}\left(\frac{x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}\right) = +\infty$

2) Calculons: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\cos^2(x) - 4\cos x + 2}{x^4\cos x}\right)$

Soit x un réel de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $x \neq 0$; on a:

$2\cos^2(x) - 4\cos x + 2 = 2(\cos^2(x) - 2\cos x + 1) = 2(1-\cos x)^2$

alors: $\frac{2\cos^2(x) - 4\cos x + 2}{x^4\cos x} = \frac{2}{\cos x} \times \frac{(1-\cos x)^2}{x^4} = \frac{2}{\cos x}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2$

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\cos x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

alors: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\cos^2(x) - 4\cos x + 2}{x^4\cos x}\right) = \frac{1}{2}$

3) Calculons: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\right)$

Soit x un réel tel que: $1-\sin x-\cos x \neq 0$, on a:

$\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x} = \frac{(1+\cos x)-\sin x}{(1-\cos x)-\sin x}$

Puisque: $1+\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et

$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ alors:

$$\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x} = \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ProfSalmi.blogspot.com

Or: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=-\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=-1$

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\right)=-1$

Exercice 45

1) Déterminons $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Soit x un réel non nul.

On a: $\left|x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le|x^3|$, car $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le 1$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\left|x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le|x^3|$

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0}|x^3|=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$; d'aprés une propriété de limites et ordre

2) Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+5\sin x}{x-2}\right)$

Soit x un réel de l'intervalle $]2;+\infty[$.

On a: $-1\le\sin x\le 1$ donc $4x-5\le 4x+5\sin x\le 4x+5$

Or $x-2>0$ d'où $\dfrac{4x-5}{x-2}\le\dfrac{4x+5\sin x}{x-2}\le\dfrac{4x+5}{x-2}$

Puisque: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-5}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}4=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+5}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}4=4\end{cases}$

alors, d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+5\sin x}{x-2}\right)=4$

3) Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty}([x]-\cos x)$

On a: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $[x]\le x<[x]+1$, par suite $[x]\le x$ et $x-1<[x]$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x-1<[x]\le x$

Soit x un réel de $]0;+\infty[$.

On a: $[x]-\cos x=x\left(\dfrac{[x]}{x}-\dfrac{\cos x}{x}\right)$

Puisque $x-1<[x]\le x$ alors $\dfrac{x-1}{x}<\dfrac{[x]}{x}\le 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$

ProfSalmi.blogspot.com

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$)

Et on a: $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\cos x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=1$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=0$)

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{[x]}{x}-\dfrac{\cos x}{x}\right)=1$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x+\infty$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{[x]}{x}-\dfrac{\cos x}{x}\right)=+\infty$. C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}([x]-\cos x)=+\infty$.

Exercice 46

1) Montrons $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

Soit x un réel non nul , on a: (on multiplie et on divise par le conjugué du numérateur)

$$f(x)=\frac{\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}}{x^2}=\frac{\cos x-1}{x^2(\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3})}$$
$$=\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3}}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

alors, par produit , $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3}}\right)=\dfrac{-1}{4\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{12}$

D'où $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

2) a) Montrons que: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)|\le\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$

Soit x un réel non nul, on a: $|\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}|\le\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3}$

et puisque $1\le2+\cos x\le3$ alors $1\le\sqrt{2+\cos x}\le\sqrt{3}$

Donc $|\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}|\le2\sqrt{3}$

Or : $|f(x)|=\left|\dfrac{\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}}{x^2}\right|=\dfrac{|\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}|}{x^2}$, donc $|f(x)|\le\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$

D'où $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)|\le\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$

b) Déduction:

On a: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)|\le\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}=0$

ProfSalmi.blogspot.com

alors, d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=0$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Exercice 47

1) Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f.

Soit x un réel, on a: $f(x)=\dfrac{x\sqrt{3-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$, alors

$x\in D \iff 3-x\geq 0$ et $x\neq 0$ et $2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\neq 0$

$\iff x\leq 3$ et $x\neq 0$ et $2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\neq 0$

Or $-1\leq \sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$ alors $1\leq 2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 3$

C'est-à-dire: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ 2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\neq 0$.

Donc: $x\in D \iff x\leq 3$ et $x\neq 0$

$\iff x\in\ ]-\infty;0[\cup]0;3]$

D'où: $D=\ ]-\infty;0[\cup]0;3]$

2) a) Montrons que: $(\forall x\in[-1;1]\setminus\{0\})\ ;\ |f(x)|\leq 2|x|$.

Soit x un réel de $[-1;1]-\{0\}$, on a: $-1\leq x\leq 1 \iff -1\leq -x\leq 1$

$\iff 2\leq 3-x\leq 4$

alors $\sqrt{2}\leq\sqrt{3-x}\leq 2$ (1)

Et on a: $1\leq 2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 3$, donc : $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\leq 1$ (2)

de (1) et (2) on déduit que:

$(\forall x\in[-1;1]\setminus\{0\});\dfrac{\sqrt{2}}{3}\leq\dfrac{\sqrt{3-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\leq 2$:

Puisque : $|f(x)|=|x|\left(\dfrac{\sqrt{3-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\leq\dfrac{\sqrt{3-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\leq 2$

alors $|x|\left(\dfrac{\sqrt{3-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\leq 2|x|$, c'est-à-dire: $|f(x)|\leq 2|x|$

D'où: $(\forall x\in[-1;1]\setminus\{0\})\ ;\ |f(x)|\leq 2|x|$

b) Déduction:

ProfSalmi.blogspot.com

On a: $(\forall x \in [-1;1])\ ;\ |f(x)| \leq 2|x|$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2|x| = 0$

Donc, d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3) Déterminons $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

On pose: $X = \frac{1}{x}$, on a: $x \longrightarrow -\infty$ équivaut à $X \longrightarrow 0^-$

alors $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}(2+\sin(X)) = 2$ (car $\lim\limits_{X\to 0^-}\sin(X) = \sin(0) = 0$)

Et on a: $\lim\limits_{x\to -\infty} 3-x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3-x} = +\infty$, par suite $\lim\limits_{x\to -\infty}(x\sqrt{3-x}) = -\infty$.

D'où $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 48

1) Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1})x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\right)$

Soit x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a:

$$\frac{x(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1})}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = \frac{x(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1})(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-1})}$$

$$= \frac{2x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{2(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-1})}$$

$$= \frac{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}$$

Puisque: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^4} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}\right) = \frac{2}{2} = 1$

Donc: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\right) = 1$

2) Calculons: $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{1-x^3}+x-1)$

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;0[$, on a:

$$\sqrt{1-x^3}+x-1 = \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-x\right)}+x-1 = |x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-x}+x-1$$

Donc: $\sqrt{1-x^3}+x-1 = -x\sqrt{\frac{1}{x^2}-x}+x-1 = x\left(1-\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-x}\right)$

Puisque: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^2}-x\right) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}-x} = +\infty$

Et on a: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}(x) = -\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

donc: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-x}\right)+\infty$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-x^3}+x-1)=+\infty$

3) Calculons: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}\right)$.

On pose: $x-\frac{\pi}{3}=X$, alors $x=X+\frac{\pi}{3}$ et $\pi-3x=-3X$

et on a: $x\longrightarrow\frac{\pi}{3}$ équivaut à $X\longrightarrow 0$

Puisque: $\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}=\frac{1-2\cos\left(X+\frac{\pi}{3}\right)}{-3X}$

$$=-\left(\frac{1-2\left(\cos X\cos\frac{\pi}{3}-\sin X\sin\frac{\pi}{3}\right)}{3X}\right)$$

$$=-\left(\frac{1-\cos X+\sqrt{3}\sin X}{3X}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\times\frac{1-\cos X}{X}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sin X}{X}$$

et $\lim\limits_{X\to0}\frac{\sin X}{X}=1$; $\lim\limits_{X\to0}\frac{1-\cos X}{X}=0$

alors $\lim\limits_{X\to0}\left(-\frac{1}{3}\times\frac{1-\cos X}{X}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sin X}{X}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}\right)=\lim\limits_{X\to0}\left(-\frac{1}{3}\times\frac{1-\cos X}{X}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sin X}{X}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) Calculons: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$

Soit x un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $x\neq0$, on a:

$$\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos x}=\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1+\cos x}{1-\cos^2(x)}=\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1+\cos x}{\sin^2(x)}$$

$$=\frac{1-\cos x}{\sin^2(x)}=\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

alors $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}\right)=\frac{1}{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2(x)}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 49

1) • Calculons: $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-E(x))$

Soit x un réel de l'intervalle $]0;1[$, on a: $E(x)=0$

donc: $x-E(x)=x$ pour tout réel x de $]0,1[$.

D'où: $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-E(x))=\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0$

* Calculons: $\lim\limits_{x\to 0^-}(x-E(x))$

Soit x un réel de $]-1;0[$, on a: $E(x)=-1$,

donc: $x-E(x)=x+1$ pour tout réel de $]-1;0[$

D'où: $\lim\limits_{x\to 0^-}(x-E(x))=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$

2) I) Calculons: $\lim\limits_{x\to a^+}(E(x+2)+E(2-x))$ où $a\in\mathbb{Z}$

Soit x un réel de l'intervalle $]a;a+1[$

On a: $a<x<a+1\Longleftrightarrow 0<x-a<1$

On pose: $h=x-a$ c'est-à-dire: $x=a+h$ où $0<h<1$

Par suite: $E(x+2)+E(2-x)=E(a+2+h)+E(2-a-h)$

Comme: $a\in\mathbb{Z}$ alors: $a+2\in\mathbb{Z}$ et $2-a\in\mathbb{Z}$

donc: $E(a+2+h)=a+2+E(h)=a+2$; car $E(h)=0$,

et $E(2-a-h)=2-a+E(-h)=2-a-1=1-a$; car $E(-h)=-1$.

Par conséquent: $E(x+2)+E(2-x)=3$ pour tout réel x de $]a;a+1[$

D'où: $\lim\limits_{x\to a+}(E(x+2)+E(2-x))=3$

II) Calculons: $\lim\limits_{x\to a^+}E(x)+(x-E(x))^2$

Soit x un réel de l'intervalle $]a;a+1[$, on a: $E(x)=a$

donc: $E(x)+(x-E(x))^2=a+(x-a)^2$

Et on a: $\lim\limits_{x\to a}(a+(x-a)^2)=a+(a-a)^2=a$

D'où: $\lim\limits_{x\to a^+}E(x)+(x-E(x))^2=a$

ProfSalmi.blogspot.com

III) Calculons: $\lim\limits_{x\to a^-} E(x)+(x-E(x))^2$ où $a\in\mathbb{Z}$

Soit x un réel de l'intervalle $]a-1;a[$; on a: $E(x)=a-1$,

donc: $E(x)+(x-E(x))^2=a-1+(x-(a-1))^2$

Et on a:

$\lim\limits_{x\to a}(a-1+(a-1+(x-(a-1))^2)=a-1+(a-(a-1))^2=a-1+1=a$

D'où: $\lim\limits_{x\to a^-}(x-(x-E(x))^2)=a$

Exercice 50

1) Déterminons D , où $f(x)=\sqrt{x^2-2x\cos(x)+1}$

Soit x un réel , on a: $x\in D\Longleftrightarrow x^2-2x\cos x+1\geq 0$

Puisque:

$x^2-2x\cos x+1=x^2-2x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x=(x-\cos x)^2+\sin^2 x$

Or: $(x-\cos x)^2\geq 0$ et $\sin^2 x\geq 0\Rightarrow(x-\cos x)^2+\sin^2 x\geq 0$,

alors: $x^2+2x\cos x+1\geq 0$

D'où: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x^2-2x\cos x+1\geq 0$

Par conséquent: $D=\mathbb{R}$

2) a) Montrons que: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\left|\frac{\cos x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}$

Soit x un réel non nul, on a: $-1\leq\cos x\leq 1$, c'est-à-dire: $|\cos x|\leq 1$.

Comme: $|x|>0$ alors: $\frac{1}{|x|}|\cos x|\leq\frac{1}{|x|}$ équivaut à $\left|\frac{\cos x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\left|\frac{\cos x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}$

b) Déduction:

Soit x un réel non nul, on a:

$f(x)=\sqrt{x^2\left(1-2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x^2}}$

Puisque: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\left|\frac{\cos x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$ alors, d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

Et on a: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1-2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$

ProfSalmi.blogspot.com

d'où: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{1-2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1}=1$

Comme: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}|x|=+\infty$ alors: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}|x|\sqrt{1-2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x^2}}=+\infty$

Ainsi: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$

3) a) Montrons que: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ ;\ |x-\cos x|\le f(x)\le x+1$

Soit x un réel positif, on a: $f(x)=\sqrt{(x-\cos x)^2+\sin^2 x}$

Puisque: $(x-\cos x)^2\le(x-\cos x)^2+\sin^2 x$

alors: $\sqrt{(x-\cos x)^2}\le\sqrt{(x-\cos x)^2+\sin^2 x}$ c'est-à-dire: $|x-\cos x|\le f(x)$ (1)

D'autre part on a: $-1\le\cos x\le 1$ et $x\ge 0$, donc $-2x\le -2x\cos x\le 2x$

Par suite: $x^2-2x+1\le x^2-2x\cos x+1\le x^2+2x+1$, c'est-à-dire:

$0\le x^2-2x\cos x+1\le(x+1)^2$ donc: $\sqrt{x^2-2x\cos x+1}\le\sqrt{(x+1)^2}$

équivaut à: $f(x)\le x+1$ (2) (car: $\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|=x+1$)

Ainsi de (1) et (2) , on déduit que: $|x-\cos x|\le f(x)\le x+1$

pour tout réel positif x.

b) Déduction:

Soit x un réel strictement positif, on a: $|x-\cos x|\le f(x)\le x+1$

donc: $\left|1-\frac{\cos x}{x}\right|\le\frac{f(x)}{x}\le 1+\frac{1}{x}$

Puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$ alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|1-\frac{\cos x}{x}\right|=1$

Et on a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

Donc, d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

Exercice 51

1) Montrons que: $(\forall x\in D)\ ;\ f(x)=\dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Soit x un réel de $D=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$; on a:

$$f(x)=4x\tan(2x)-\frac{\pi}{\cos(2x)}=\frac{4x\sin(2x)}{\cos(2x)}-\frac{\pi}{\cos(2x)}=\frac{4x\sin(2x)-\pi}{\cos(2x)}$$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$$= 2\left(\cos^2(x) - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

alors: $f(x) = \dfrac{4x\sin(2x) - \pi}{2\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{4x\sin(2x) - \pi}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} \times \dfrac{1}{2\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Ainsi: $(\forall x \in D)\ ;\ f(x) = \dfrac{4x\sin(2x) - \pi}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} \times \dfrac{1}{2\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.

2) Montrons que: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} \right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Soit x un réel différent de $\frac{\pi}{4}$, on pose: $X = x - \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire: $x = X + \frac{\pi}{4}$.

On a: $x \to \frac{\pi}{4}$ équivaut à: $x \longrightarrow 0$

et $\dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \dfrac{\cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{X} = \dfrac{1}{X}\left(\cos X \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{X}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos X - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\cos X - 1 - \sin X}{X}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1 - \cos X}{X}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin X}{X}$$

Puisque: $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{1 - \cos X}{X} = \lim\limits_{X \to 0} \left(\dfrac{1 - \cos X}{X^2}\right).X = \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$

alors: $\lim\limits_{X \to 0} \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1 - \cos X}{X}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sin X}{X} \right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{X \to 0} \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1 - \cos X}{X}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sin X}{X} \right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) a) Montrons que: $\dfrac{4x\sin(2x) - \pi}{x - \frac{\pi}{4}} = -4\pi h \times \left(\dfrac{1 - \cos(2h)}{4h^2}\right) + 4\cos(2h)$

Soit x un réel de D, on pose: $h = x - \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire: $x = \frac{\pi}{4} + h$

ProfSalmi.blogspot.com

On a: $\dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}} = \dfrac{4\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-\pi}{h}$

$$= \frac{(\pi+4h)\cos(2h)-\pi}{h}$$

$$= \frac{4h\cos(2h)-\pi(1-\cos(2h))}{h}$$

$$= \frac{4h\cos(2h)}{h} - \frac{\pi(1-\cos(2h))}{h}$$

$$= 4\cos(2h) - 4\pi h\left(\frac{1-\cos(2h)}{4h^2}\right)$$

Donc: $\dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}} = -4\pi h\times\left(\dfrac{1-\cos(2h)}{4h^2}\right)+4\cos(2h)$

b) Déduction:

Soit x un réel de D , on pose $h = x-\dfrac{\pi}{4}$

donc: $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$ équivaut à $h \longrightarrow 0$

On a: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = \lim\limits_{h\to 0}\left(-4\pi h\times\left(\dfrac{1-\cos(2h)}{4h^2}\right)+4\cos(2h)\right)$

Puisque: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cos(2h)}{4h^2} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$

(En posant $t = 2h$ donc: $h \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow t \longrightarrow 0$)

$\lim\limits_{h\to 0}(-4\pi h) = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0}4\cos(2h) = 4\cos(0) = 4$

alors: $\lim\limits_{h\to 0}\left(-4\pi h\left(\dfrac{1-\cos(2h)}{4h^2}\right)+4\cos(2h)\right) = 4$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4\pi\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = 4$

4) Montrons que la fonction f admet une limite finie en $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

d'aprés la question 1) , on aura:

$(\forall x\in D)\ ;\ f(x) = \dfrac{4x\sin(2x)-\pi}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$$= \frac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}\times\frac{1}{\dfrac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

ProfSalmi.blogspot.com

et on a, d'aprés les questions précédentes:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}=4 \text{ et } \frac{1}{\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$$

Et puique : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Donc:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}\times\frac{1}{\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)=4\times(-\sqrt{2})\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=-2$$

Ainsi: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=-2$

Exercice 52

1) Montrons que: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)-x|<x^2$

Soit x un réel non nul , on a: $E\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}<E\left(\frac{1}{x}\right)+1$

donc: $\frac{1}{x}-1<E\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$

Puisque: $x^2>0$ alors: $x-x^2<x^2E\left(\frac{1}{x}\right)\le x$ équivaut à:

$-x^2<x^2E\left(\frac{1}{x}\right)-x\le 0$, par suite $-x^2<x^2E\left(\frac{1}{x}\right)-x<x^2$ (car $x^2>0$)

C'est-à-dire: $\left|x^2E\left(\frac{1}{x}\right)-x\right|<x^2$, donc $|f(x)-x|<x^2$

D'où: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)-x|<x^2$

2) Déduction

Soit x un réel non nul, on a:

$$|f(x)-x|<x^2\Leftrightarrow -x^2<f(x)-x<x^2$$
$$\Leftrightarrow -x^2+x<f(x)<x^2+x$$

Puisque: $\lim_{x\to 0}(-x^2+x)=\lim_{x\to 0}(x^2+x)=0$

alors, d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 53

1) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ; -2x^2+x+1 < f(x) \leq x+1$

Rappel. $(\forall a \in \mathbb{R})\ ;\ E(a) \leq a < E(a)+1$

• $(\forall a \in \mathbb{R})\ ;\ a-1 < E(a) \leq a$

Soit x un réel non nul, on a: $\frac{1}{x}-1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}-1 < E\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq \frac{1}{x^2}$

donc: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-2 < E\left(\frac{1}{x^2}\right)+E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$

Puisque $x^2 > 0$ alors: $1+x-2x^2 < x^2\left(E\left(\frac{1}{x^2}\right)+E\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leq 1+x$

C'est-à-dire: $-2x^2+x+1 < f(x) \leq x+1$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ; -2x^2+x+1 < f(x) \leq x+1$

2) Déduction:

On a: $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ; -2x^2+x+1 < f(x) \leq x+1$ et

$\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = \lim\limits_{x\to 0}(-2x^2+x+1) = 1$ donc, d'aprés la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Exercice 54

1) • Déterminons: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Soit x un réel de l'intervalle $]0;1[$, on a: $E(x)=0$ donc: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ alors: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

• Déterminons: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Soit x un réel de l'intervalle $]-1;0[$; on a: $E(x)=-1$.

donc: $f(x)=\frac{-1+\sin x}{x}=-\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}$

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ alors: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=+\infty$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq f(1)$

2) a) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ; |f(x)-1| \leq \frac{2}{|x|}$

Soit x un réel non nul, on a:

ProfSalmi.blogspot.com

$f(x)-1=\dfrac{E(x)+\sin x}{x}-1=\dfrac{E(x)-x}{x}+\dfrac{\sin x}{x}$

Puisque: $\left|\dfrac{E(x)-x}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\left|\dfrac{E(x)-x}{x}\right|+\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$

alors: $|f(x)-1|\leq\left|\dfrac{E(x)-x}{x}\right|+\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$

On a: $E(x)\leq x<E(x)+1$ équivaut à: $0\leq x-E(x)<1$

donc: $|x-E(x)|<1$ par suite $\left|\dfrac{x-E(x)}{x}\right|<\dfrac{1}{|x|}$ (1)

Et on a: $|\sin x|\leq 1$ alors: $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}$ (2)

Donc de (1) et (2), on déduit: $\left|\dfrac{x-E(x)}{x}\right|+\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{2}{|x|}$

Alors on a: $\begin{cases}|f(x)-1|\leq\left|\dfrac{E(x)-x}{x}\right|+\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \\ \left|\dfrac{E(x)-x}{x}\right|+\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\dfrac{2}{|x|}\end{cases}$

D'où: $|f(x)-1|\leq\dfrac{2}{|x|}$

Ainsi: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)-1|\leq\dfrac{2}{|x|}$

b) Déduction:

On a: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)-1|\leq\dfrac{2}{|x|}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

Donc, d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

Exercice 55

1) a) Montrons que: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ \dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}<f(x)\leq\dfrac{b}{a}$

Soit x un réel strictement positif, on a: $E\left(\dfrac{b}{x}\right)\leq\dfrac{b}{x}<E\left(\dfrac{b}{x}\right)+1$

donc: $\dfrac{b}{x}-1<E\left(\dfrac{b}{x}\right)\leq\dfrac{b}{x}$.

Puisque: $\dfrac{x}{a}>0$ alors: $\dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}<\dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{b}{x}\right)\leq\dfrac{b}{a}$,

c'est-à-dire: $\dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}<f(x)\leq\dfrac{b}{a}$

D'où: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ \dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}<f(x)\leq\dfrac{b}{a}$.

b) Montrons que: $(\forall x\in]-\infty;0[)\ ;\ \dfrac{b}{a}\leq f(x)<\dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}$.

Soit x un réel strictement négatif, on a:

ProfSalmi.blogspot.com

$\frac{b}{x}-1<E\left(\frac{b}{x}\right)\leq\frac{b}{x}$ et $\frac{x}{a}<0$ donc: $\frac{b}{a}\leq\frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)<\frac{b}{a}-\frac{x}{a}$

C'est-à-dire: $\frac{b}{a}\leq f(x)<\frac{b}{a}-\frac{x}{a}$.

D'où: $(\forall x\in]-\infty;0[)\ ;\ \frac{b}{a}\leq f(x)<\frac{b}{a}-\frac{x}{a}$

2) Déduction:

On a: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ \frac{b}{a}-\frac{x}{a}<f(x)\leq\frac{b}{a}$

Donc: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ -\frac{x}{a}<f(x)-\frac{b}{a}\leq 0<\frac{x}{a}$

C'est-à-dire: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ \left|f(x)-\frac{b}{a}\right|\leq\left|\frac{x}{a}\right|$

Et on a: $(\forall x\in]-\infty;0[)\ ;\ \frac{b}{a}\leq f(x)<\frac{b}{a}-\frac{x}{a}$

Donc: $(\forall x\in]-\infty;0[)\ ;\ \frac{x}{a}<0\leq f(x)-\frac{b}{a}<-\frac{x}{a}$

C'est-à-dire: $(\forall x\in]-\infty;0[)\ ;\ \left|f(x)-\frac{b}{a}\right|<\left|\frac{x}{a}\right|$

Par conséquent: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left|f(x)-\frac{b}{a}\right|<\left|\frac{x}{a}\right|$

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{x}{a}\right|=0$ alors, d'aprés la propriété de limites et ordre:

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{b}{a}$.

Exercice 56

1) a) Montrons que: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left|f(x)-\frac{\sin x}{x}\right|\leq|\sin x|$

Soit x un réel non nul, on a:

$$f(x)-\frac{\sin x}{x}=(\sin x)E\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\sin x}{x}=\sin(x)\left(E\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)$$

donc: $\left|f(x)-\frac{\sin x}{x}\right|=|\sin x|\left|E\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|$

Puisque: $\frac{1}{x}-1<E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}$ alors $-1<E\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\leq 0<1$

donc $\left|E\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|<1$

par suite: $|\sin x|\left|E\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|\leq|\sin x|$, c'est-à-dire: $\left|f(x)-\frac{\sin x}{x}\right|\leq|\sin x|$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left|f(x)-\frac{\sin x}{x}\right|\leq|\sin x|$

b) Déduisons $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

ProfSalmi.blogspot.com

Soit x un réel de $\mathbb{R}^*$, on a:

$\left|f(x)-\frac{\sin x}{x}\right|\leq|\sin x|$ équivaut à $-|\sin x|\leq f(x)-\frac{\sin x}{x}\leq|\sin x|$

équivaut à $\frac{\sin x}{x}-|\sin x|\leq f(x)\leq\frac{\sin x}{x}+|\sin x|$

et puisque $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0$

alors: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-|\sin x|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+|\sin x|=1$

Donc, d'aprés la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

2) a) Montrons que: $(\forall x>0)\ ;\ |f(x)|\leq\frac{1}{x}$

Soit x un réel strictement positif , on a: $\frac{1}{x}-1<E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}$

Puisque: $x>0$ alors: $0<E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}$ donc $\left|E\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq\frac{1}{x}$.

Comme $|\sin x|\leq 1$ donc $|\sin x|\left|E\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq\frac{1}{x}$

C'est-à-dire: $\left|\sin(x)E\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq\frac{1}{x}$

Ainsi: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ |f(x)|\leq\frac{1}{x}$

b) Déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

On a: $(\forall x>0)\ ;\ |f(x)|\leq\frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Donc, d'aprés lapropriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

3) a) Montrons que: $\lim\limits_{x\to 0}xE\left(\frac{1}{x}\right)=1$

Soit x un réel non nul, on a: $\frac{1}{x}-1<E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}$

donc: $-1<E\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\leq 0<1$

Par suite: $\left|E\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|<1$, D'où $\left|x\,E\left(\frac{1}{x}\right)-1\right|\leq|x|$

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ alors , d'aprés la propriété de limites et ordre:
$\lim\limits_{x\to 0}x\,E\left(\frac{1}{x}\right)=1$

b) Déduction:

On a: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ f(x)=\sin(x)E\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(x\,E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$ alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\left(xE\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=1$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

Exercice 57

1) Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a: $x>1$ alors $0<\dfrac{1}{x}<1$

donc: $E\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$. Par suite $f(x)=\sqrt{2}x$ pour tout réel x de $]1;+\infty[$.

D'où: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2}x=+\infty$

2) a) Montrons que: $(\forall x>0)\ ;\ \sqrt{1+x^2}\le f(x)\le\sqrt{2x^2+2x+1}$

Soit x un réel strictement positif , on a: $\dfrac{1}{x}-1<E\left(\dfrac{1}{x}\right)\le\dfrac{1}{x}$

alors: $\dfrac{1}{x}-1<E\left(\dfrac{1}{x}\right)\le\dfrac{1}{x}\iff\dfrac{1}{x}<E\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\le\dfrac{1}{x}+1$

Comme $x>0$ alors: $\dfrac{1}{x^2}<\left(E\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\right)^2\le\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2$

Par suite: $1+\dfrac{1}{x^2}<\left(E\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\right)^2+1\le\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2+1.$

Donc: $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}<\sqrt{\left(E\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\right)^2+1}\le\dfrac{\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}$

(car $\sqrt{x^2}=|x|$ et $x>0$)

Par conséquent: $\sqrt{1+x^2}<x\sqrt{\left(E\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\right)^2+1}\le\sqrt{2x^2+2x+1}$

D'où: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ \sqrt{1+x^2}\le f(x)\le\sqrt{2x^2+2x+1}$

b) Déduction:

On a: $(\forall x>0)\ ;\ \sqrt{1+x^2}\le f(x)\le\sqrt{2x^2+2x+1}$ et $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x^2+1}=1$;

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{2x^2+2x+1}=1$, donc, d'aprés la propriété de limites et ordre:

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$

c) Déterminons: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $]-1;0[$, on a: $\dfrac{1}{x}<-1$ alors $1+\dfrac{1}{x}<0$

Comme: $\dfrac{1}{x}-1<E\left(\dfrac{1}{x}\right)\le\dfrac{1}{x}$ alors $\dfrac{1}{x}<E\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\le 1+\dfrac{1}{x}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc: $\left(\frac{1}{x}+1\right)^2 \leq \left(E\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)^2 < \frac{1}{x^2}$ par suite:

$$1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \leq 1+\left(E\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)^2 < 1+\frac{1}{x^2}$$

Puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$

alors: $$\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \leq \sqrt{1+\left(E\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)^2} < \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

c'est-à-dire: $$\frac{\sqrt{2x^2+2x+1}}{|x|} \leq \sqrt{1+\left(E\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)^2} < \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$$

Or $|x|=-x$ donc $-\frac{\sqrt{2x^2+2x+1}}{x} \leq \sqrt{1+\left(E\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)^2} < -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

équivaut à $-\sqrt{1+x^2} < x\sqrt{1+\left(E\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)^2} \leq -\sqrt{2x^2+2x+1}$

D'où: $(\forall x \in]-1;0[)\ ;\ -\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{2x^2+2x+1}$

Comme: $\lim\limits_{x\to 0}(-\sqrt{1+x^2}) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}(-\sqrt{2x^2+2x+1}) = -1$

alors, d'aprés la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

3) Etudions la limite de f en $\frac{1}{k}$, où $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Soit k un entier naturel non nul et différent de 1

On a: $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{k+1};\frac{1}{k}\right[\right)\ ;\ k < \frac{1}{x} < k+1$ donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = k$

par suite: $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{k+1};\frac{1}{k}\right[\right)\ ;\ f(x) = x\sqrt{1+(1+k)^2}$

D'où: $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{k}\\ x<\frac{1}{k}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{k}\\ x<\frac{1}{k}}} x\sqrt{1+(1+k)^2} = \frac{\sqrt{k^2+2k+2}}{k}$

On a aussi: $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{k};\frac{1}{k-1}\right[\right)\ ;\ k-1 < \frac{1}{x} < k$ donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = k-1$

par suite: $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{k};\frac{1}{k-1}\right[\right)\ ;\ f(x) = x\sqrt{k^2+1}$

D'où: $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{k}\\ x>\frac{1}{k}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{k}\\ x>\frac{1}{k}}} x\sqrt{k^2+1} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

Ainsi: $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{k}\\ x>\frac{1}{k}}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{k}\\ x<\frac{1}{k}}} f(x)$, c'est-à-dire la fonction n'admet pas de limite en $\frac{1}{k}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 58

1) Déterminons D l'ensemble de définition de f.

Soit x un réel, on a:

$x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in]0;+\infty[$ et $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \in]0;1[\sqcup]1;+\infty[$

Donc: $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$

2) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a: $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < 1$

Donc $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$, par suite : $(\forall x > 1)$; $f(x) = 0$

et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Si: $x \in \left]\frac{1}{p^2};\frac{1}{(p-1)^2}\right[$

On a: $\frac{1}{p^2} < x < \frac{1}{p^2-1} \Leftrightarrow \frac{1}{p} < \sqrt{x} < \frac{1}{p-1}$

$\Leftrightarrow p - 1 < \frac{1}{\sqrt{x}} < p$

Donc $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = p - 1$, d'où $f(x) = \frac{p-1}{x-1}$

Ainsi $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{p^2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{p^2}\right)^+} \left(\frac{p-1}{x-1}\right) = \frac{p-1}{\frac{1}{p^2}-1} = \frac{-p^2}{p+1}$

• Si: $x \in \left]\frac{1}{(p+1)^2};\frac{1}{p^2}\right[$

On a: $\frac{1}{(p+1)^2} < x < \frac{1}{p^2} \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} < \sqrt{x} < \frac{1}{p} \Leftrightarrow p < \frac{1}{\sqrt{x}} < p+1$

Donc: $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = p$, d'où $f(x) = \frac{p}{x-1}$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{p^2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{p^2}\right)^-} \left(\frac{p}{x-1}\right) = \frac{p}{\frac{1}{p^2}-1} = \frac{p^3}{1-p^2}$.

ProfSalmi.blogspot.com